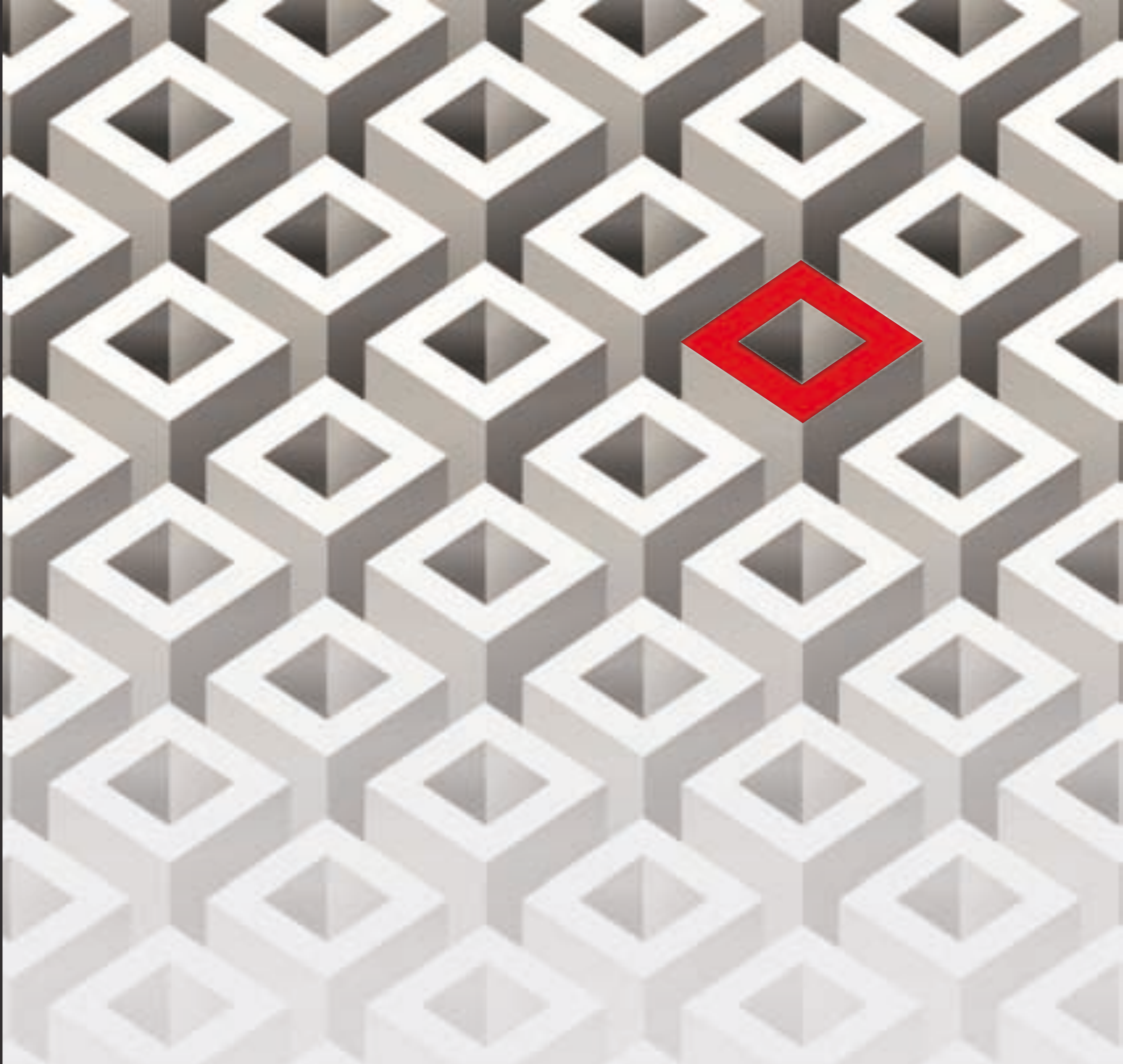


La enseñanza de la matemática en educación básica

UN LIBRO DE RECURSOS

EDITADO POR LEE PENG YEE

MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN DE LAS MATEMÁTICA | INSTITUTO NACIONAL DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NANYANG DE SINGAPUR

Academia Chilena de Ciencias

LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN BÁSICA

Un libro de recursos

Editado por:
Lee Peng Yee
Matemática y Educación de Matemática
Instituto Nacional de Educación
Universidad Tecnológica Nanyang, Singapur

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

LA ENSEÑANZADE MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN BÁSICA
Un libro de recursos

Editado por:
Lee Peng Yee
Matemática y Educación de Matemática
Instituto Nacional de Educación
Universidad Tecnológica Nanyang, Singapur

Traducción y Revisión
Laura Valdivia, Pablo Saavedra y Andrea Lagarini
Contact Chile Comunicaciones S.A.

Editor de esta edición
Patricio Felmer Aichele

Comité Editorial
Juan A. Asenjo, Juan Carlos Castilla y Diana Veneros

Coordinador de esta edición
Marcela Reyes Azancot

Diseño gráfico
Claudio Silva Castro

Diseño de portada
Juan Manuel Neira Lorca

I.S.B.N.: 978-956-XXXX-X.
1ª edición: febrero de 2014.

Almirante Montt 454. Teléfono 24812841.
E-mail: academiaciencia@123.cl / Santiago de Chile.

Impreso por Graficandes ®. Santo Domingo 4593. Santiago de Chile.

Contenidos

Prefacio a la edición en español

Este libro es un aporte de la Academia Chilena de Ciencias a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en nuestro país. Se publica en el contexto nacional de una creciente preocupación por la formación de profesores, la que poco a poco va tomando fuerza y se va instalando como una nueva realidad, que requiere de grandes esfuerzos de los distintos actores nacionales para que en los años se vayan dando los frutos deseados. Una de las componentes de esta nueva realidad se manifiesta en el programa INICIA con sus tres componentes, los estándares orientadores, las pruebas de egreso y los convenios de desempeño de apoyo a las universidades. Esta iniciativa, que se encuentra en pleno desarrollo, pone grandes desafíos a los programas de formación de profesores de educación básica, para quienes se define un ámbito de acción de primero a sexto básico y cuatro áreas temáticas bajo su responsabilidad, Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. Ciertamente es un enorme desafío para las universidades proveer de oportunidades de aprendizaje para los futuros profesores, oportunidades que les permitan una formación en todas las complejas dimensiones del quehacer docente, con las competencias disciplinarias y pedagógicas necesarias para liderar y estimular el aprendizaje de los niños y niñas en las cuatro áreas mencionada arriba.

En la formación matemática de los futuros profesores y profesoras, los estándares orientadores ponen énfasis en los conocimientos matemáticos trenzados con los conocimientos pedagógicos planteando nuevas metas. Una mirada a estos estándares muestra que los requerimientos para los futuros profesores exceden de manera importante lo que se ha comprimido usualmente en dos o tres cursos universitarios, en el entendido que, después de todo, para enseñar matemática no es necesaria una preparación tan cuidadosa y compleja. De los estándares '*...despliegan en sus indicadores dos grandes dimensiones. En primer lugar ...Saber la Disciplina para Enseñar y que comprende los conceptos, los procedimientos, las representaciones, la resolución de problemas, el razonamiento y el lenguaje matemático. En segundo lugar… Saber Enseñar la Disciplina, que tiene que ver con el conocimiento del currículo escolar, la planificación y gestión de clases (estrategias metodológicas y didácticas) y la evaluación del aprendizaje, todos aspectos que deben ser estructurados en coherencia con los contenidos matemáticos para que puedan ser efectivos. La necesaria integración entre contenidos matemáticos y pedagógicos para enseñar con efectividad esta disciplina, debe ser parte central de la formación de un profesor o profesora para dejar atrás una presentación separada, y, a veces, antagónica,* *de estas dos vertientes que se entrelazan en el quehacer del docente. Además de los aspectos ya mencionados, encontramos indicadores referidos a cuestiones muy propias de la matemática y que apuntan a cómo el futuro un profesor o profesora logra que los niños y niñas realmente hagan matemática en el sentido completo de la palabra. A esto se acompaña el conocimiento y uso de los recursos didácticos con un importante componente, como es el dominio de tecnologías de la información y comunicaciones...'*

El desafío de la formación de profesores y profesoras para enseñar matemática en la educación básica es enorme cuando se contrasta con la escasez de formadores de profesores con estudios de doctorado en matemática y educación matemática, que sean capaces de llevar adelante las transformaciones que se requiere en este ámbito, en las numerosas instituciones que ofrecen carreras de pedagogía en educación básica. Este desafío también se contrasta con la poca disponibilidad de libros y materiales que informen sobre estrategias de formación de profesores y de formación escolar. Esta necesidad ha sido el fundamento de la iniciativa REFIP, que ha tomado con fuerza la tarea de producir textos y materiales audiovisuales para la formación en matemática de los profesores de enseñanza básica, que sirvan de apoyo tanto a los formadores como a los futuros profesores en el contexto de los estándares. La publicación de este libro se suma a este importante esfuerzo, contribuyendo con elementos de la experiencia de Singapur, que sin duda complementarán las visiones de los profesores en formación.

El logro académico de Singapur en todas las áreas del conocimiento está a la vista de cualquier observador que, con un poco de objetividad, pueda revisar los últimos cuarenta años de su historia. Estos logros se expresan con mucha fuerza en la matemática escolar, área donde Singapur ha destacado consistentemente en todas las mediciones internacionales y la gran pregunta que uno se plantea, desde nuestra realidad y desde nuestras necesidades es ¿y cómo lo hicieron? Sin duda esta pregunta tiene muchas respuestas que van desde razones culturales, históricas y geográficas hasta políticas públicas y estrategias académicas. Solo quisiera tocar dos aspectos que creo nos pueden ayudar a entender y encausar nuestra propia historia.

En primer lugar llama la atención el valor que la sociedad singapurense le da a la educación. Esto se expresa en una fuerte preocupación de los padres porque sus hijos se dediquen con esmero a su propia educación, comprendiendo que si eso sucede, las puertas del futuro se abren en la dirección que ellos elijan. Existe confianza de que el sistema escolar provee lo necesario para lograr el desarrollo personal, que el esfuerzo y la perseverancia con certeza es recompensado. En esto tenemos mucho que aprender, y no se trata de constatar y lamentarse que los padres y madres chilenos no incentivan suficiente a su hijos a estudiar, lo que no es del todo cierto, y que en eso nos diferenciamos de Singapur y otros países asiáticos. Quizás este aparente poco interés de los padres en la educación de sus hijos es el reflejo de la desconfianza en una educación y una sociedad incapaz de producir los espacios para el desarrollo de todos.

En segundo lugar, un aspecto distintivo del progreso de Singapur en educación es la capacidad que han tenido sus académicos de aprender de los avances y experiencias del resto del mundo. Con una mirada propia han incorporado ideas y estrategias en una amalgama original que rescata lo mejor, lo adapta y recrea. Este libro es una muestra de la acumulación de conocimientos en todos estos años que se inician cuando nadie creía que esta aventura era posible. Tenemos que aprender de esta experiencia, no para copiarla sino para recrearla en nuestra propia amalgama.

Tal como el subtítulo lo anuncia, este es un libro de recursos. Sus autores, todos investigadores y formadores de profesores del National Institute of Education (NIE) cuentan de primera mano sus conocimientos y experiencias en la formación matemática de los profesores y profesoras de enseñanza básica. En su primera parte, el libro presenta una visión global de la formación de profesores en Singapur, con sus seis componentes ordenadoras: conocimiento matemático, conocimiento del currículo, conocimiento de los alumnos, pedagogía orientada a la matemática, medición del aprendizaje de los alumnos y aprendizaje y valores de por vida. Estas seis componentes apuntan a los elementos fundamentales en la formación de los profesores de educación básica para enseñar matemática, como la conciben en Singapur y plantean un interesante ejercicio a los formadores y futuros profesores chilenos, los que pueden contrastarlos con los estándares orientadores. El libro sigue con la descripción del currículo nacional de Singapur, con su característico pentágono y la resolución de problemas en su interior, luego con un modelo de enseñanza y aprendizaje y finalmente con una descripción del sistema de evaluación de los aprendizajes matemáticos de Singapur. Un capítulo especial está dedicado a la resolución de problemas, declarado centro del currículo escolar de Singapur.

En su segunda parte, este libro aborda uno a uno los principales temas escolares, con énfasis la enseñanza de los números, eje principal de nuestro currículo nacional. En cada uno de los capítulos se presentan las ideas centrales, el currículo, diferentes representaciones de los conceptos, las dificultades de los alumnos, ejemplos de actividades para los alumnos, actividades para los futuros profesores y en muchos casos fuentes de lectura complementaria. Más adelante la geometría, el álgebra y la manipulación de datos son abordados en respectivos capítulos con similares características.

La tarea de formación de profesores y profesoras para enseñar matemática en los niveles escolares básicos requiere de conocimientos, experiencias y fortalezas presentes en numerosos matemáticos que se desempeñan en las universidades y otras instituciones de investigación, y que han llevado el nombre de Chile a los mejores centros del mundo. Este libro es también una invitación a ellos y ellas, matemáticos entusiastas, jóvenes y no tan jóvenes, a sumarse a esta fascinante tarea. La experiencia muestra que las formas de aportar son variadas y requieren de distintos niveles de compromiso, los que son perfectamente compatibles con una demandante carrera académica. Es necesario tejer una trama que vaya desde aquellos que crean la matemática hasta quienes la recrean en el aula escolar, pasando por los formadores de profesores y expertos en instituciones de administración de la educación.

Este libro constituye un complemento para la formación de nuestros futuros profesores, pero también constituye un aporte a los profesores y profesoras en ejercicio, quienes encontrarán ideas y propuestas para incorporar en sus aulas. Si bien esta versión en español de este interesante libro está orientada al medio nacional, no nos cabe duda que su interés supera las barreras nacionales por los temas fundamentales que trata. La realidad chilena no es muy distinta a la de muchos países de la región latinoamericana, por lo que ofrecemos esta obra también a todos aquellos que en sus países quieren mejorar su propia educación.

La edición de este libro ha sido posible gracias a un convenio de colaboración entre el Ministerio de Educación, a través del programa MECESUP y la Academia Chilena de Ciencias, en el cual le cupo un especialmente rol a Ricardo Reich, a quien agradecemos con especial énfasis. También agradecemos al presidente de la Academia Chilena de Ciencias, profesor Juan A. Asenjo, por su permanente apoyo a las iniciativas de educación en la Academia, y a Marcela Reyes, coordinadora de la Academia, por la coordinación diligente del proceso de edición.

Patricio Felmer, Editor
Miembro de Número Academia Chilena de Ciencias
Santiago, diciembre de 2013

Autores de esta publicación

Chan Chun Ming, Eric, se encuentra por el momento cursando sus estudios doctorales en Pedagogía en Matemática y es profesor del Grupo de Matemática y Educación Matemática (MME por su sigla en inglés) del Instituto Nacional de Educación (NIE). Antes de que se uniera al equipo del MME, Chan era subdirector de una escuela de educación básica en Singapur. Sus áreas de interés incluyen tareas de desempeño y aprendizaje basado en problemas, además de resolución de problemas matemáticos, con especial interés en problemas abiertos.

Antes de que formara parte del NIE, **Chua Kwee Gek**, era miembro de la Rama de Evaluación e Investigación del Ministerio de Educación (1998-2001). En la actualidad, es una docente titular del MME, NIE (2003-2006). Enseña tanto en los currículos de formación de profesores de matemática para el nivel de educación básica y media. Como parte de su trabajo de investigación, se encuentra estudiando el impacto del comportamiento de los profesores en los estudiantes que se encuentran aprendiendo matemática, y los problemas que se relacionan con el conocimiento pedagógico del contenido que tienen los profesores de matemática.

Douglas Edge es un profesor asociado del NIE. Luego de dedicar los primeros años de su carrera a enseñar en escuelas de Canadá y, luego, de Nigeria, completó sus estudios doctorales en la Universidad de Maryland, en la clínica del Centro de Aritmética para niños con problemas de aprendizaje. Una vez graduado, Edge volvió a su país natal, Canadá, para dedicarse a la formación de profesores. Durante su estadía en este país, aprovechó sus vacaciones y las oportunidades de programas de intercambio para adquirir más experiencia en Inglaterra, Francia y Malasia. En 2000, se fue a vivir a Singapur para luego formar parte del equipo docente del NIE. Como profesor, académico y profesional, Edge sigue trabajando para ayudar a los niños que tienen dificultades para aprender matemática.

Foong Pui Yee obtuvo su doctorado en la Universidad de Monash, Australia, y luego se unió al NIE, donde ahora es una profesora asociada del MME. Se especializa en la educación matemática a nivel de enseñanza básica y trabaja como docente en los programas de formación de profesores antes de la práctica, después de la práctica y de posgrado. Su área de estudio actual es el razonamiento matemático y la resolución de problemas, los factores afectivos que influyen en el aprendizaje de la matemática y las creencias de los profesores. La amplia experiencia de Foong en la disciplina de matemática incluye todos los años que se desempeñó como coordinadora del Magíster en Educación del programa de Educación Matemática del NIE.

Jaguthsing Dindyal tiene un doctorado en educación matemática y actualmente se desempeña como profesor asistente en el NIE. Sus responsabilidades docentes abarcan los cursos de enseñanza de matemática a nivel de educación básica y media. Entre sus intereses se incluye la geometría y las demostraciones, el razonamiento algebraico y el currículo de matemática.

Koay Phong Lee es una profesora asociada del MME, y enseña los cursos de educación matemática en los programas de formación de profesores del NIE. Como investigadora, sus áreas de trabajo incluyen la resolución de problemas y la enseñanza y aprendizaje de temas matemáticos a nivel de enseñanza básica y primeros años de enseñanza media. Koay es también una de las autoras de Shaping Maths, un texto escolar interactivo para estudiantes de enseñanza básica en Singapur.

Lee Ngan Hoe es un profesor del MME, NIE. Co-autor de Shaping Maths, las investigaciones de Lee se centran en la enseñanza de la matemática a nivel de educación básica y media. También le interesan los aspectos sociales y el impacto de la educación matemática, como la formación de profesores, la enseñanza del razonamiento, y la función de la familia en el aprendizaje de la matemática.

Ng Luan Eng se especializa en estrategias de evaluación alternativas, conocimiento pedagógico de contenido matemático, creencias de los profesores y desarrollo profesional de los profesores. Además de ser una candidata doctoral en Educación Matemática, Ng se desempeñó como docente titular del MME, NIE, desde 2003 a 2006. Después, se unió al equipo del Ministerio de Educación, en donde ahora trabaja en la planificación curricular. Ng también es miembro del equipo de investigación del Proyecto de Evaluación Matemática del Centro de Investigación y Pedagogía y Práctica (CRPP por su sigla en inglés) en el NIE.

Ng Swee Fong es una profesora asociada del MME, NIE, y es además la investigadora co-principal del Laboratorio de Desarrollo Cognitivo Aplicado del Centro de Investigación en Pedagogía y Práctica (también del NIE). Antes de unirse al NIE, se desempeñó durante 20 años en Malasia como profesora de matemática a nivel de educación media. Ahora trabaja tanto con estudiantes de pedagogía como con profesores de matemática en ejercicio. Entre sus otras responsabilidades se incluye la enseñanza y supervisión a nivel de magíster y doctorado. A pesar de que su especialización es la enseñanza y aprendizaje de álgebra, Ng siempre ha mostrado interés por mejorar las maneras de enseñar y adquirir el conocimiento matemático a lo largo del currículo escolar.

Quek Khiok Seng es un profesor asistente del MME, y subdirector del Programa Fundacional en el NIE. Sus áreas de estudio se centran en la evaluación y la formación de profesores. Quek, un colaborador comprometido en proyectos que investigan la integración, influencia y uso de nuevas estrategias de evaluación en las clases de matemática, es también un miembro clave del equipo de investigación del Proyecto de Evaluación Matemática en el CRPP, NIE.

Tan-Foo Kum Fong se desempeñó como docente asociada en el MME, NIE, entre 2003 y 2006. Antes de esto, era profesora en escuelas en Singapur. Tan-Foo se siente motivada cuando ayuda a los niños a superar las dificultades de aprendizaje que tiene en matemática. En 2007, se fue del MME y volvió a unirse al equipo docente del Ministerio de Educación, y actualmente se encuentra trabajando en las investigaciones del Proyecto de Evaluación Matemática del CRPP, NIE.

Wong Khoon Yoong (PhD) es profesor asociada y director del MME, NIE. Sus investigaciones abordan varios aspectos de la educación general y la educación matemática, entre los que se incluyen las estrategias y teorías de aprendizaje y enseñanza, estudios comparativos de currículos de matemática, y formación de profesores. Su experiencia como profesor de matemática y docente abarca cinco países: Australia, Brunei, Malasia, Filipinas y Singapur.

Yeap Ban Har (PhD), fue profesor y director en escuelas de Singapur, ahora enseña cursos de Educación Matemática en el NIE. También es miembro del consejo editorial de The Mathematics Educator, una publicación oficial de la Asociación de Profesores de Matemática de Singapur. Experto en las áreas de resolución de problemas y formulación de problemas, Yeap ha dirigido numerosos cursos de desarrollo profesional para profesores en Singapur y otras partes de Asia, como también en Sudáfrica, los Emiratos Árabes Unidos y los Estados Unidos.

Yeo Kai Kow, Joseph, (PhD) es profesor asistente en MME, NIE. En la actualidad, participa en la formación de profesores en ejercicio y estudiantes de pedagogía en matemática a nivel de enseñanza básica y media. Asimismo, ha dirigido numerosos cursos de desarrollo profesional para profesores en Singapur. Antes de unirse al NIE, fue subdirector y director de Departamentos de Matemática en establecimiento de enseñanza media. Fue miembro del equipo de la Rama de Evaluación e Investigación del Ministerio de Educación entre 1998 y 2000. Entre sus intereses de investigación se incluyen la resolución de problemas matemáticos a nivel de educación básica y media, el conocimiento pedagógico de contenido matemático y la ansiedad frente a la matemática.

Parte 1

Marco curricular

Capítulo 1

Introducción: un marco para la enseñanza de la matemática en escuelas de educación básica

Wong Khoon Yoong

Introducción

Aprender a enseñar matemática a estudiantes de educación básica significa encaminarse en una labor desafiante, pero a la vez inspiradora. Es posible que este viaje haya comenzado cuando a los estudiantes de pedagogía les tocó aprender matemática en la escuela. Esta experiencia adquiere un nuevo sentido ahora que, como estudiantes en práctica, les toca aprender a enseñar matemática. Este tipo de entrenamiento exige que los futuros profesores reflexionen críticamente sobre sus experiencias de aprendizaje pasadas, adquieran nuevos conocimientos pedagógicos y aprendan a dominar estrategias útiles para planificar y enseñar matemática, a fin de conseguir los diferentes objetivos de aprendizaje. Este libro de recursos ha sido especialmente diseñado por pedagogos de la matemática del Grupo Académico de Matemática y Matemática (MME por su sigla en inglés) del Instituto Nacional de Educación (NIE por su sigla en inglés), Singapur, para hacerles más fácil este viaje a los estudiantes de pedagogía que opten por cursar los módulos de estudio del currículo de matemática de la enseñanza básica.

Este libro se organiza en dos partes principales. La primera de ellas está dividida en 5 capítulos, en los cuales se analizan el currículo, las teorías de enseñanza, las teorías de la pedagogía, la evaluación y la resolución de problemas en matemática, haciendo especial referencia a la educación básica en Singapur. La segunda parte trata sobre la enseñanza de temas específicos, desde números naturales a gráficos estadísticos. En cada uno de estos se indica lo mínimo que se tiene que cubrir de acuerdo con el plan de estudios de Singapur, los conceptos matemáticos claves, las técnicas de enseñanza específicas y las tareas de evaluación. Se pueden incluir dos tipos de actividades: actividades para *profesores* y actividades para *alumnos*.

Las actividades para *profesores* permiten que los estudiantes de pedagogía reflexionen y comprendan distintos temas sobre educación y situaciones prácticas. Por ejemplo, les permite saber cuándo es mejor exponer un tema a toda la clase, cómo dirigir un grupo de trabajo, qué se puede planificar para corregir los errores de los alumnos, y otras interrogantes similares. Estas actividades para profesores brindan oportunidades importantes para relacionar la práctica con la teoría y viceversa. Por el otro lado, las actividades para *alumnos* corresponden a ejemplos de tareas en aula que pueden ser utilizadas, tal vez con algunas modificaciones, por los estudiantes de pedagogía cuando les toque enseñar. Por lo general, comprenden guías de ejercicios y baterías de problemas. Antes de utilizar estas actividades en clase, es necesario que los estudiantes de pedagogía las resuelvan, a fin de entender la experiencia educacional que se entrega y cómo discutir las ventajas y desventajas en relación con los objetivos de aprendizaje.

Es primordial que no se confundan las funciones de los dos tipos de actividades. Algunos temas y estrategias comunes se repetirán en los capítulos de enseñanza, tales como heurísticas en resolución de problemas y las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC).

Un ejercicio útil es explicarse a uno mismo cómo distintos autores han aplicado estas estrategias en distintos tópicos. Aunque algunos autores han escrito sus capítulos teniendo en mente a estudiantes de pedagogía como su público principal, la mayoría de las ideas y de las estrategias también son pertinentes para los profesores en ejercicio, en especial para aquellos que están comenzando su carrera.

Los programas de práctica pedagógica por lo general incluyen muchos conjuntos de módulos, tales como los estudios de educación, que tratan sobre temas, teorías y técnicas de educación a nivel general; los estudios del currículo o metodología específica de un tema; los temas académicos, que cubren el conocimiento de contenido a nivel de educación superior; y la práctica o enseñanza en escuela. En el NIE, los estudiantes de pedagogía básica también completan módulos de conocimiento disciplinar, con el objeto de profundizar en materias escolares como la matemática. Estos distintos módulos sirven diferentes propósitos, aunque hasta cierto punto se traslapan debido a que la enseñanza es una labor que abarca diversas áreas. En una clase en particular, el profesor o profesora debe estar consciente de lo que sus alumnos están haciendo; debe garantizar que participen en las actividades asignadas; debe tener una buena interacción con la clase completa y con cada alumno; y debe tener bajo control el comportamiento de los alumnos en clases. El éxito de cada clase depende de muchos factores relacionados entre sí, tales como el dominio que tenga el profesor de la matemática que enseña, el conocimiento anterior de los alumnos, la naturaleza de las actividades para el aprendizaje y la importancia que tienen para los alumnos los recursos disponibles y los estilos y creencias de enseñanza personales del profesional a cargo. Aunque los diferentes módulos entregan información sobre diferentes aspectos de la enseñanza, es útil contar con un marco que organice los conceptos claves y los temas en un plan coherente y con sentido. Una posible solución puede ser el marco de Formación Inicial de Profesores de Matemática Reflexivos (PMTE por su sigla en inglés). Este marco entrega una visión integral de la relación entre los principales factores, a fin de lograr una enseñanza eficaz de la matemática.

El marco reflexivo de la PMTE

El marco se puede apreciar en la Ilustración 1-1. Consiste en seis componentes claves que se enfocan en dos aspectos principales: *el profesor reflexivo* y la *práctica basada en evidencias*. A su vez, cada componente comprende distintos temas. La lista de temas que se muestran en la Ilustración 1-1 no pretende ser exhaustiva. Estos son temas que actualmente se analizan en las publicaciones relacionadas con la educación y también dan muestra de la preferencia del autor.

El enfoque: profesor reflexivo, práctica basada en evidencias

El marco especifica que el PMTE se enfoca principalmente en ayudar a los estudiantes de pedagogía a convertirse en profesionales reflexivos. Lo anterior se basa en el importante trabajo de Schön (1983) sobre los distintos tipos de profesionales y se apoya en pedagogos de matemática tales como Lernam (1994). Los profesores reflexivos planifican qué quieren hacer y cómo lo quieren hacer. Asimismo, analizan lo que pasa después de cada instancia. Ser reflexivo es lo opuesto a hacer algo de forma meramente mecánica y rutinaria. Por ejemplo, un estudiante de pedagogía puede querer utilizar gráficos de fracciones para enseñar fracciones equivalentes. Lo más probable es que los estudiantes tomen estos gráficos de fracciones de textos escolares o recursos electrónicos, o hayan visto que otros profesores los utilizan. Esta iniciativa, por ende, no es reflexiva. Para que sí lo sea, el estudiante de pedagogía tendrá que considerar los aspectos positivos y negativos de los distintos métodos para enseñar fracciones equivalentes, examinar la literatura en busca de evidencia y elegir una que se ajuste a los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes objetivo. Ella o él tendrán que planificar su clase según los diferentes factores relevantes. Durante la clase, el estudiante en práctica debe prestar atención a la forma cómo sus alumnos responden a los distintos aspectos de la enseñanza. Por ejemplo, puede anotar las preguntas que formulan otros estudiantes o comentar sobre la falta de interés que demuestren durante las tareas de aprendizaje. Una vez finalizada la clase, el o la estudiante en práctica debe tratar de comprender cuáles aspectos de la clase funcionan y cuáles no. Asimismo, puede relacionar esta experiencia a principios pedagógicos relevantes, tales como el conductismo, el constructivismo o las teorías del procesamiento de la información que aprendieron en los módulos de estudio del currículo y estudio de educación. Tales reflexiones pueden ser la fuente de nuevo conocimiento pedagógico. Por lo general, este conocimiento no queda documentado y se reconoce como los conocimientos prácticos *implícitos* que los profesores adquieren con el tiempo. Este conocimiento, que se acumula gradualmente, fortalece las prácticas futuras que se basan en la reflexión y no en las acciones rutinarias o reacciones frente a incidentes específicos en clases. De esta manera, las clases que sigan serán mejores.

Ilustración 1 - 1 Marco de Formación Inicial Reflexiva de Profesores de Matemática (PMTE).

Un profesor reflexivo utilizará fuentes de evidencia distintas a fin de sojuzgar qué enseñar y cómo. Estas fuentes incluyen consideraciones lógicas (por ejemplo, enseñar la suma antes de la multiplicación), investigaciones empíricas dirigidas por otros (por ejemplo, Owens, 1993) y por uno mismo (por ejemplo, investigación acción) y el conocimiento práctico de otros docentes y formadores. Se deben considerar los estudios de investigación locales si lo que se busca es entender y tratar los problemas de enseñanza que ocurren a nivel local, aunque las investigaciones extranjeras nos permiten ampliar nuestra perspectiva y, por lo general, pueden conllevar soluciones plausibles. El punto anterior explica por qué en los últimos años han aparecido muchos estudios sobre la enseñanza de la matemática que incluyen a diferentes países. Entre estos se incluyen estudios a gran escala, tales como el TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias) y PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos), al igual que otros estudios bilaterales de menor escala. Los formadores de docentes de matemática que enseñan módulos de estudio del currículo pueden compartir con sus alumnos en práctica consejos útiles y sus reglas generales sobre lo que es la buena enseñanza, porque las diversas fuentes de evidencia pueden dar cabida a enfoques que se contradicen entre sí. En este caso, los estudiantes de pedagogía solo serán capaces de resolverlos por medio de la práctica y la reflexión crítica. Este es un proceso dinámico, si se toma en cuenta los cambios entre los estudiantes, los currículos y las tecnologías de la enseñanza. Por ende, los estudiantes de pedagogía no se deberían quedar estancados en pocas estrategias e ignorar estos cambios. En los módulos de estudio del currículo, se espera que los estudiantes de pedagogía utilicen varias fuentes de evidencia para justificar su preferencias a la hora de seleccionar acciones de enseñanza para planificar clases y diseñar tareas.

Componente 1: conocimiento matemático

Los cimientos del PMTE se centran en un dominio sólido del conocimiento matemático relevante que se enseña a nivel escolar. En investigaciones recientes se ha demostrado que algunos estudiantes de pedagogía solo saben aplicar los procedimientos normales al momento de resolver problemas matemáticos, pero no conocen los aspectos fundamentales de la matemática. Este último conocimiento incluye saber la razón por la cual algunas reglas y procedimientos funcionan, ya sea de la manera axiomática formal o, al menos, con el respaldo de posibles justificaciones basadas en matemática sólidas (Ma, 1999). Por ejemplo, cuando se suman fracciones, se debe obtener un mismo denominador para sumar los numeradores, pero cuando se multiplican fracciones, solo es necesario multiplicar los numeradores y los denominadores por separado. ¿Por qué las operaciones funcionan de esta manera? ¿Por qué no podemos intercambiar las reglas, como en los ejemplos que se muestran a continuación?

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{(1+2)}{(2+3)}=\frac{3}{5}$ (se suman los numeradores y denominadores por separado)

$\frac{1}{2}\text{x}\frac{2}{3}=\frac{3}{6}\text{x}\frac{4}{6}=\frac{12}{6}$ (se multiplican los numeradores y se mantienen los denominadores)

Otras pregunta engañosa o difícil de explicar es la 'regla de la inversión', cuando se divide por una fracción, al igual que la regla 'menos por menos da más'', para multiplicar números negativos (ver otros ejemplos en Crouse y Sloyer, 1977). Una parte importante del PMTE es que expone a los estudiantes de pedagogía a estas preguntas engañosas y los ayuda a formular explicaciones posibles y a crear tareas de aprendizaje que les sirvan a sus alumnos. En Singapur, el módulo de conocimiento de temas apunta a profundizar la comprensión que tienen los estudiantes de pedagogía sobre los tópicos de matemática de educación básica, los que deben estudiar para luego enseñar. Estos módulos no tratan sobre la matemática de la enseñanza superior, porque no siempre llevan a una mejor comprensión de la matemática que se enseña en las escuelas. Este fenómeno se denomina 'transferencia descendente' del conocimiento matemático (Wong, 1997). Para citar a Cooney (2001):

> *Los estudiantes de pedagogía por lo general no son capaces de establecer vínculos importantes en la matemática escolares y por lo general ponen al descubierto sus conceptos errados. Lo anterior se aplica, a nivel de pregrado, tanto para los alumnos que les va bien como aquellos que luchan con la matemática (p.27).*

Las últimas reformas a los currículos de matemática, entre las que se incluyen las de Singapur, hacen hincapié en el pensamiento de alto nivel, la creatividad en la matemática, las heurísticas en resolución de problemas, las demostraciones o justificaciones y el 'enfoque de modelos', que solo se aplica en la matemática básica en Singapur (ver Capítulo 4 sobre estrategias que se utilizan para la resolución de problemas). Estos conjuntos de habilidades matemática diferencian a los estudiantes de pedagogía que solo siguen reglas mecánicamente de aquellos que razonan de forma matemática ('matematizan'). Para permitir que los estudiantes de pedagogía sean capaces de contestar las preguntas complejas que hacen sus alumnos y los puedan guiar en su desarrollo matemático, es esencial que posean un dominio sólido del pensamiento y el conocimiento matemático. Una forma eficaz en la que los estudiantes de pedagogía pueden fortalecer sus matemática es resolver nuevos problemas (por sobre el nivel de educación básica) de manera cotidiana, a fin de que se puedan convertir en mejores "matemáticos" a medida que aprenden a enseñar la materia.

Componente 2: conocimiento el currículo de matemática

Se espera que los profesores en Singapur impartan el contenido del plan de estudios oficial, que se organiza en una 'estructura de pentágono', la cual se explica en el Capítulo 2. Por lo tanto, necesitan contar con un conocimiento profundo del currículo de matemática a nivel escolar, lo que incluye los fundamentos, los objetivos, el alcance, la profundidad y los vínculos con otros tópicos matemáticos en el plan de estudios. Este punto se retoma en el capítulo sobre currículos escrito por Ng Swee Fong. También se podrá encontrar información sobre el currículo deseado en las guías pedagógicas, las preguntas de examen pasadas y los libros de asesoría producidos comercialmente, aunque los estudiantes de pedagogía deben ser cuidadosos al momento de utilizar estas fuentes para planificar sus clases. En Singapur, algunos profesores enseñan por sobre los estándares requeridos para cada año escolar. Los niños que no pueden lidiar con tales estándares más exigentes se frustran y pueden llegar a rendirse ante la matemática, una situación que se busca evitar.

Los estudiantes de pedagogía tienen que aprender más sobre el currículo y no dedicarse solo al nivel en el que tendrán que enseñar, por ejemplo, la transición de jardín infantil a nivel de educación básica, y de nivel de educación básica al de educación media. Este conocimiento les dará una mejor noción del alcance de los tópicos dentro del currículo espiral. Asimismo, deben saber cómo los documentos del currículo (el currículo deseado) se pueden llevar a la práctica en esquemas de trabajo específicos (el currículo implementado) y en las planificaciones de las clases. Durante la práctica, los estudiantes de pedagogía aprenderán más sobre la forma en que las escuelas de Singapur imparten los programas de matemática específicos de cada escuela.

En las dos décadas anteriores, aparecieron distintas iniciativas en el sistema educacional de Singapur, y los estudiantes de pedagogía tienen que entender estas iniciativas en relación con el currículo de la matemática. Una iniciativa importante es la Educación Nacional, puesta en marcha en 1997. Su objetivo es incluir temas nacionales y actuales en la enseñanza de las materias escolares, incluida la matemática. Por ejemplo, en vez de pedir a los niños que calculen 985762 - 985595, lo que constituye una práctica normal de la resta, los profesores pueden colocar esto en un contexto significativo:

Antes del Año Nuevo, la mamá de Mei Lin le da un montón de billetes de $2. Los billetes tienen números de serie que van desde el 985595 al 985762. Ella coloca $6 en cada paquete rojo. ¿Cuántos paquetes rojos puede preparar?

En este ejemplo, se ilustra el uso de la matemática en una actividad cultural importante para los singapurenses de tradición china. Esto se puede ampliar a fin de que cubra las costumbres de otras tradiciones. Este ejemplo es importante para el mensaje de armonía racial de la iniciativa Educación Nacional (consulte Wong, 2003, para otros ejemplos).

Componente 3: conocimiento de los alumnos

La enseñanza consiste en brindar ayuda a cada uno de los alumnos para que puedan aprender. Cada alumno es único, y trae consigo a la escuela sus propias fortalezas, debilidades, intereses y necesidades. Ausubuel (1968), el reconocido psicólogo educacional, enfatiza este punto clave al colocar el siguiente principio en la primera página de su libro:

Si tuviese que reducir toda la psicología educacional a un principio, diría lo siguiente: el factor único más importante que ejerce influencia sobre el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Se debe constatar este principio y enseñar conforme al mismo.

Un punto importante que se debe saber sobre los alumnos es lo que han aprendido de matemática en los cursos anteriores o en situaciones extra escolares. Sin embargo, aun cuando un tópico ya se haya visto antes, es posible que algunos alumnos todavía no lo dominen o que hayan olvidado lo que han aprendido. Otros alumnos tal vez tengan concepciones erradas. Por ejemplo, pueden pensar que en la división siempre se obtienen números más pequeños como resultado o que no se puede obtener un número más grande de uno más pequeño (Watson, 1991). En muchos estudios se demuestra que las concepciones erradas se basan en la generalización excesiva de las clases exitosas, por lo que son difíciles de corregir (Olivier, 1989). Los estudiantes de pedagogía tienen que buscar las concepciones erradas por medio de un análisis de tareas, entrevistas clínicas o análisis de errores (Newman, 1977). Se pueden utilizar muchas estrategias para lidiar con estas dificultades de aprendizaje (Ashlock, 2002). Esta es una labor de largo aliento y, durante sus carreras de enseñanza, los profesores por lo general se sorprenden (y a veces llegan a desanimarse) al descubrir que los alumnos cometen muchos más errores inesperados.

El aprendizaje de la matemática sería más beneficioso y significativo, y las ideas permanecerían más tiempo, si el trabajo guardase una relación con los intereses y las necesidades de los alumnos. Por naturaleza, el entorno despierta la curiosidad en los alumnos jóvenes, y esta curiosidad debería ser el punto de partida para las clases. El reconocido profesor de matemática, Sawyer (1964), escribe:

> *Es más fácil enseñar matemática a niños pequeños, porque son curiosos, confían en sí mismos y quieren entender las cosas por cuenta propia. (p. 5)*

Los estudiantes de pedagogía deberían planificar sus clases con el fin de motivar a sus alumnos a descubrir nuevas cosas por sí mismos, pero dentro de un nivel apropiado para ellos. Algunos ejemplos de actividades para estos niños serían aquellas en que la matemática se utiliza para contar, medir, localizar, diseñar (por ejemplo, las artes y las manualidades), explicar y jugar (por ejemplo, los juegos de estrategia) (Bishop, 1991). No obstante, no se puede dar por sentado que todos los alumnos tienen los mismos intereses o necesidades. Tampoco comparten los mismos estilos de aprendizaje y preferencia, lo que incluye trabajar en actividades manuales, escuchar, leer, dibujar y escribir. Se deben tomar en consideración estas diferencias para lograr un aprendizaje eficaz.

Componente 4: pedagogía orientada a la matemática

La matemática se puede enseñar de distintas maneras. Entre ellas se encuentran las clases centradas en el profesor con la ayuda de tiza y pizarrón; preguntas y respuestas; el aprendizaje cooperativo entre grupos pequeños; el trabajo práctico con materiales didácticos concretos; literatura para niños y cuentos sobre matemática; calculadoras y TIC; debates centrados en los alumnos; y las investigaciones matemática. Estas técnicas provienen de distintos modelos teóricos sobre el aprendizaje y la enseñanza (Joyce, Calhoun y Hopkins, 1997) combinados con los principios prácticos (Yelon, 1996). Los métodos de enseñanza genéricos por lo general se enseñan en los módulos de estudio de educación y se deben adaptar para matemática, lo que permite adquirir conocimiento sobre contenido pedagógico sobre la matemática. De acuerdo con Shulman (1986), este tipo de conocimiento de contenido comprende:

> *las formas de representar y formular el tema de manera tal que a otros les sea más fácil entenderlo...una comprensión de aquello que provoca que el aprendizaje de ciertos temas sea fácil o difícil: las concepciones actuales y previas que los estudiantes de diferentes edades y provenientes de diferen-*

> *tes contextos traen consigo al momento de aprender los tópicos y las clases que se enseñan con mayor frecuencia (p. 9).*

En la enseñanza de la matemática, son muy frecuentes las clases en donde gran parte del tiempo es el profesor quien presenta la materia. Una de las características de esta opción es la claridad. Una presentación clara de la matemática comprende ejemplos y contraejemplos adecuados para ilustrar el significado de conceptos, los que se enseñan en una secuencia lógica con un lenguaje apropiado de acuerdo con el alumno objetivo. La presentación de los temas se puede mejorar por medio de simulaciones que utilicen objetos didácticos concretos, applets y otros recursos TIC. Los estudiantes de pedagogía necesitarán tiempo para dominar todas estas sutiles técnicas de enseñanza. Una práctica continua tiene que utilizar enfoques de enseñanza innovadores, tales como grupos de trabajo e investigaciones abiertas, bajo la guía de tutores (por ejemplo, la microenseñanza) y profesores experimentados y ayudantes (durante la práctica laboral en escuelas). Durante el PMTE, se espera que los estudiantes de pedagogía adquieran solo un número limitado de estrategias, para que sientan confianza al utilizarlas, en vez de muchas técnicas que muchas veces los dejan perplejos y les cuesta aplicarlas de forma eficaz durante la práctica. En el Capítulo 3, Douglas Edge provee un modelo realista para ayudar a los estudiantes de pedagogía a planificar sus clases.

Se debe coordinar una pedagogía adecuada a la matemática con el manejo eficaz del comportamiento de los alumnos en clases, a fin de que participen plenamente en el aprendizaje. Este objetivo requiere de un entorno cálido y motivador, que valore y se afirme sobre las ideas de los alumnos. Por lo general, las experiencias emocionales y sociales en el aula son, de hecho, lo que muchos estudiantes recuerdan de sus días de colegios y de sus profesores cuando ya han olvidado el contenido de la materia (Bluestein, 1995).

Componente 5: medición del aprendizaje de los alumnos

Un punto que se debe recalcar es que la enseñanza no produce automáticamente el aprendizaje deseado. Un buen profesor verifica si sus alumnos han comprendido la clase por medio de mediciones formativas y acumulativas. En las mediciones formativas o continuas, el profesor verifica lo que sus alumnos han aprendido durante la clase. Para esto, puede pasearse por la sala para ver el trabajo de los alumnos, formular preguntas dirigidas a toda la clase o a algunos alumnos en particular, escuchar sus conversaciones y otros ejemplos similares. Se espera que los profesores revisen el progreso de sus alumnos por medio de la corrección regular de tareas. Cuando se obtiene información de distintas fuentes, se puede conseguir evidencia esencial de la calidad y el alcance del aprendizaje de los alumnos. Esta evidencia se puede utilizar para planificar otras clases, actividades de recuperación o profundización y experiencias para promover buenos hábitos para el aprendizaje de la matemática.

Las mediciones acumulativas usualmente consisten en pruebas y exámenes escritos que se toman durante lapsos de tiempo determinados. Se utilizan para evaluar la precisión y la rapidez de cada alumno al momento de realizar distintas tareas matemática. De esta manera, se puede examinar el logro de los alumnos en determinados periodos del año escolar. Las notas de los exámenes acumulativos se pueden entregar a los padres y se pueden utilizar como una forma de dar aliento o recompensa. En Singapur, los alumnos rinden el Examen de Egreso de Educación Básica (PSLE por su sigla en inglés) al final del sexto año de ese ciclo. Por lo general, esto lleva a que los profesores "enseñen en función de la prueba" y que se les exija más a los estudiantes a fin de que logren buenos resultados en la evaluación. En el Capítulo 5, Yeap Ban Har y Lee Ngan Hoe describirán cómo diseñar y asignar una nota a las pruebas escritas similares al PSLE.

En los últimos años, el Ministerio de Educación de Singapur ha alentado a los profesores a utilizar modos alternativos para medir el aprendizaje de los alumnos. A continuación se entregan algunos ejemplos:

- Resultados cognitivos: tareas de desempeño, investigaciones, trabajo en proyectos, presentaciones orales, calificación de compañeros, autoevaluación
- Compromiso afectivo y creencia: listas de revisión, cuaderno de apuntes de los alumnos, observaciones del profesor
- Destrezas de aprendizaje: reflexión de los alumnos, listas de revisión, entrevistas

Estas son técnicas más avanzadas, que usualmente se cubren en la práctica laboral. Sin embargo, en el PMTE, los estudiantes de pedagogía deberían tomar conciencia de la razón por la cual se utilizan estas técnicas y sus propósitos.

Componente 6: aprendizaje y valores de por vida

Los cinco componentes anteriores abordan conocimientos, destrezas y técnicas específicas. Este último componente, aunque no por eso menos importante, se refiere a los valores y las características del aprendizaje de por vida, que es uno de los emblemas del adulto profesional.

Los estudiantes de pedagogía deberían meditar por qué quieren convertirse en profesores. Son muchas las razones que se mencionan: el gusto de trabajar con niños, la pasión de ayudar a los niños a convertirse en individuos desarrollados de manera holística, el conocimiento y los valores que se imparten a los niños, el marcar una diferencia en las vidas de los alumnos, el hecho de que la enseñanza es un trabajo bien pagado, y otros ejemplos por el estilo. Los estudiantes de pedagogía deben contestar la pregunta sobre lo que les motiva de acuerdo con sus propios valores, creencias y comprensión de la labor docente. La capacitación que reciben les dará la oportunidad única de examinar aquello que los motiva en comparación con la realidad del docente, en particular después de que han pasado un tiempo en una escuela realizando su práctica.

El Modelo de Formación de Profesores del NIE, creado por la Oficina de Programas Fundacionales en el periodo 2004-2005, considera a los "valores" como el componente esencial de los profesores principiantes. En la Tabla 1-1 se listan estos valores y se entregan algunas sugerencias de cómo podrían ser relevantes para los estudiantes de pedagogía en matemática.

Tabla 1-1 Valores para los profesores principiantes (Modelo de NIE) y relevancia para los estudiantes de pedagogía en matemática.

Valores (Modelo del INE)	**Los estudiantes de pedagogía en matemática**
Todos los alumnos pueden aprender	• Creen que todos los alumnos pueden aprender matemática. • Presentan actividades con distintos puntos de partida.
Preocupación y cuidado por todos los alumnos	• Utilizan actividades para satisfacer las necesidades y los intereses de los alumnos. • Ofrecen distintas oportunidades para triunfar en la matemática. • Utilizan técnicas de evaluación justas.
Respeto por la diversidad	• Utilizan contextos de problemas que no excluyen en materia de género, grupos étnicos, religión y estado socio-económico. • Incluyen actividades que promueven la Educación Nacional.
Compromiso y dedicación a la profesión	• Se unen a grupos de profesionales, por ejemplo la Asociación de Profesores de Matemática (http://math.nie.edu.sg/ame/) y la Sociedad de Matemática de Singapur (http://sms.math.nus.edu.sg).

Valores (Modelo del INE)	Los estudiantes de pedagogía en matemática
Colaboración, participación y espíritu de equipo	• Trabajan en equipos para compartir materiales y experiencias. • Publican artículos sobre su aprendizaje personal.
Aprendizaje continuo, excelencia e innovación	• Perfeccionan sus capacidades de resolver problemas matemáticos. • Inculcan una pasión por la matemática. • Llevan a cabo investigación-acción para evaluar nuevas técnicas de enseñanza.

Se espera que durante la formación, los estudiantes de pedagogía sean capaces de exhibir una conducta profesional apropiada y que defiendan ciertos valores, tales como la responsabilidad por su propio aprendizaje, el respeto por las opiniones de los otros, la participación en el debate en clase y la voluntad de querer servir de líder, porque los profesores cumplen la función de líder en sus cursos y en muchas otras instancias escolares. Estas características se pueden desarrollar por medio de trabajo en clases formal y otras actividades informales. Los profesores deberían establecer redes con otros profesores y con la comunidad en conjunto. De acuerdo con Urbanski (2003), en este trabajo colectivo se distinguen reformas provisionales y permanentes en la enseñanza.

> *Cuando se trata de la educación de los estudiantes, lo que más importa son el conocimiento, las destrezas y las actitudes de los profesores. Cuando se trata de mejorar la enseñanza, el conocimiento y la sabiduría colectiva de los profesores puede marcar una diferencia entre actos de innovación al azar y reformas reales (p. v).*

La conciencia de los propios actos es otra característica importante que se debe desarrollar a lo largo de la carrera, y que debe comenzar en la práctica laboral. Los estudiantes de pedagogía tienen que aprender a apreciarse a sí mismos en términos de personalidad, preferencias y sus experiencias anteriores en relación con la enseñanza y el aprendizaje. De acuerdo con Yelon (1996), 'la mitad de la diversión de convertirse en un buen profesor es luchar por saber más de su tema, de forma tal que le permita enseñar mejor' (p. 265) y la otra mitad puede ser conocerse a uno mismo lo suficiente como para decidir en qué áreas se debe mejorar por medio del aprendizaje continuo.

La enseñanza es una profesión que evoluciona debido a que las políticas educacionales, el ambiente escolar, las características de los niños y muchos otros aspectos cambian a su vez. De hecho, en el caso de Singapur los cambios son muy rápidos. Para poder hacerles frente, los profesores deben adaptar las técnicas y estrategias que aprendieron durante el PTME y deben reflexionar sobre las fuentes de evidencias a fin de apoyar su crecimiento profesional. Las actividades de crecimiento incluyen realizar investigación acción y participar en círculos de aprendizaje, unirse a asociaciones de educación matemática, asistir a conferencias y talleres, y participar en programas certificados.

Vínculos entre los seis componentes

Los seis componentes del marco PMTE reflexivo se ordenan de forma tal de presentar la siguiente idea. Para convertirse en profesionales reflexivos, los estudiantes de pedagogía tienen que haber adquirido el conocimiento y los procesos matemáticos suficientes, como para que este componente forme la base del PMTE y del desarrollo posterior. Este conocimiento fundamental debe ir más allá de los procedimientos matemáticos normales. Los estudiantes de pedagogía tienen que relacionar esta base de conocimientos con el currículo de la matemática escolar, con el objetivo de que comprendan cómo los diferentes temas matemáticos se relacionan y se secuencian en la enseñanza. El conocimiento matemático también se requiere para comprender el desarrollo de los estudiantes en el área y los conceptos errados que tengan sobre la matemática. Estos tres tipos de conocimientos se utilizan, junto con la experiencia y la evidencia de distintas fuentes, con el fin de crear técnicas para enseñar matemática (pedagogía basada en la matemática) y evaluar los resultados de aprendizaje de los alumnos (evaluación), lo que va desde evocar cierto conocimiento al razonamiento de orden superior y cubre tanto el dominio afectivo como cognitivo. Esta integración constituye el conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Finalmente, las características deseables de un aprendizaje continuo y sus valores deben inculcarse en la etapa previa al ejercicio profesional, para que los estudiantes de pedagogía puedan convertirse en profesionales reflexivos en las etapas posteriores de su carrera.

Una actividad útil para los estudiantes de pedagogía es utilizar el marco PMTE reflexivo para meditar sobre las características y competencias de los profesores de matemática calificados. Esta lista se puede comparar con aquellas propuestas por otros educadores de matemática, como por ejemplo Standards for Excellence in Teaching Mathematics in Australian Schools (Estándares de Excelencia para la Enseñanza de la Matemática en Escuelas Australianas) de la Australian Association of Mathematics Teachers (www.aamt.edu.au/standards/) y las Declaraciones de Profesión de Profesores Altamente Calificados (Consejo Nacional de Profesores de Matemática, www.nctm.org/about/pdfs/position/qualified.pdf). Los estudiantes de pedagogía pueden utilizar estas ideas para revisar el alcance y la profundidad de su formación universitaria y práctica profesional.

Comentarios finales

El académico estadounidense William Arthur Ward nos ha dejado una cita bien conocida:

> *El profesor mediocre dice. El buen profesor explica. El profesor superior muestra. El gran profesor inspira.*

A medida que los estudiantes de pedagogía recorran los diferentes módulos de PMTE, su concepción de la enseñanza de la matemática debería pasar de tan solo decirle a los estudiantes lo que tienen que hacer a explicarles claramente los conceptos y principios detrás de las reglas, a mostrarles los significados de los distintos modos de representación y, finalmente, a inspirar a sus discípulos a querer dominar la matemática y no solo a pasar exámenes. Aún más importante, deben cultivar un amor por el tema y una apreciación por las aplicaciones de la matemática en la vida diaria y en otras actividades. El conocimiento, las destrezas y las características deseables que se resumen en el cuadro anterior deben preparar a los estudiantes de pedagogía para emprender el viaje que los llevará a convertirse en grandes profesores; un viaje emocionante, aunque no necesariamente fácil. En los otros capítulos de este libro de recursos se entregan importantes consejos para el camino que se emprende en esta difícil pero valiosa empresa.

Referencias

Ashlock, R. B. (2002). *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction.* (8va ed.). Nueva York: Merrill-Prentice Hall. Ausubel, D. P. (1968). Educational psychology: A cognitive view. Nueva York: Holt, Rinehart and Winston.

Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers. Bluestein. J. (1995). Mentors, masters and Mrs. MacGregor: Stories of teachers making a difference. Deerfield Beach, Florida: Health Communications.

Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Crouse, R. J. & Sloyer, C. W. (1977). *Mathematical questions from the classroom*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

Joyce, B., Calhoun, E. & Hopkins, D. (1997). *Models of learning: Tools for teaching.* Buckingham: Open University Press.

Lerman, S. (1994). Reflective practice. En B. Jaworski & A. Watson (Eds.), *Mentoring in mathematics teaching* (pág. 52-64). Londres: Falmer Press.

Ma, L. A. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Newman, A. (1977). An analysis of six-grade pupils' errors on written mathematical tasks. En M. A. Clements & J. Foyster (Eds.), *Research in mathematics education in Australia* (vol. 1) (pp. 239-258). Melbourne, Australia: Swinburne Press.

Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions, *Pythagoras*, 21, 10-19.

Owens, D. T. (Ed.) (1993). *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*. Nueva York: Macmillan.

Sawyer, W. W. (1964). *Vision in elementary mathematics*. Mineola, NY: Dover Publications.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Nueva York: Basic Books.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Urbanski, A. (2003). Prólogo. En E. Meyers & F. Rust (Eds.), *Taking action with teacher research* (pág. v-ix). Portsmouth, MA: Heinemann.

Watson, J. (1991). Preparing teachers to prepare children. En J. A. Malone & L. D. Miller (Eds.), *Documentos recogidos en la IX conferencia bienal de la Asociación de Profesores Universitarios de Educación Matemática* (Mathematics Education Lecturers' Association, Perth, 1991) (pág. 109-117).

Wong, K. Y. (1997). Pupil teachers' construction of content knowledge in secondary mathematics. En L. C. Aranador, I. N. Valencia & T. Vui (Eds.), *Debates de la Conferencia Internacional de 1997 sobre el Aprendizaje Cooperativo y el Constructivismo en la Enseñanza de las Ciencias y Matemática* (SEAMEO RECSAM, Penang) (pág. 2-1-2-6).

Wong, K. Y. (2003). Mathematics-based national education: A framework for instruction. En S. K. S. Tan & C. B. Goh (Eds.), *Securing our future: Sourcebook for infusing National Education into the primary school curriculum* (pág. 117-130). Singapur: Pearson Education Asia.

Yelon, S. L. (1996). *Powerful principles of instruction*. White Plains, NY: Longman Publishers USA.

Capítulo 2

El currículo de matemática para la enseñanza básica en Singapur

Ng Swee Fong

Introducción

Los profesores de matemática saben bien que Singapur se encuentra en los primeros lugares de las evaluaciones internacionales tales como el Tercer Estudio Internacional de Matemática y Ciencias, y el último Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Sin embargo, muchas veces no se menciona el hecho de que Singapur quedó en el lugar 16 de los 26 países que participaron en el Segundo Estudio Internacional de Ciencias (SISS por su sigla en inglés), realizado en 1983-1984. El Ministerio de Educación (ME) consideró que el mejor desempeño logrado en el Tercer Estudio Internacional de Matemática, en comparación con el SISS, es un resultado directo de los cambios que se integraron en el currículo de ciencias y matemática (ME, 1996). En este capítulo se presenta este currículo, el que respalda la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la enseñanza básica en Singapur.

El ME cuenta con varios departamentos, entre los cuales se encuentra el Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). La responsabilidad central del DPDC es conceptualizar el currículo de matemática. Además, el DPDC tiene la responsabilidad de revisar y actualizar de manera periódica el currículo, con el fin de que la enseñanza de la matemática en Singapur refleje e incorpore las diferentes iniciativas que puedan aparecer con el tiempo. En 1990, el ME actualizó el currículo de matemática para que se diera más importancia al desarrollo de conceptos matemáticos y a la capacidad de aplicarlos en situaciones donde un problema exige una solución matemática. En 1998, con la integración de la visión "Thinking Schools, Learning Nation" (Escuelas que piensan, nación que aprende), el DPDC volvió a conceptualizar el currículo de matemática para la enseñanza básica, con el fin de integrar las tres iniciativas: Habilidades de razonamiento, Tecnología de la información y Educación Nacional. Como resultado de este ejercicio se obtuvo el documento Mathematics *Syllabus-Primary 2001* (DPDC, 2000) (Programa de matemática: educación básica 2001). En 2005, se llevó a cabo una revisión global de los currículos de matemática a nivel de educación básica, media y preuniversitaria. Como resultado, se obtuvo el documento *Mathematics Syllabus-Primary 2007* (DPDC, 2006) (Programa de matemática: educación básica 2007), orientado a la enseñanza básica. El resultado más significativo de esta revisión para la enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel de educación básica es la recomendación de hacer hincapié en los enfoques y las técnicas pedagógicas más que en el cambio de contenido. El DPDC también se encarga de diseñar un plan de estudios de matemática detallado para cada uno de los seis niveles de la educación básica. En *Mathematics Syllabus-Primary 2007* (DPDC, 2006), la materia a enseñar y sus objetivos se especifican con claridad, lo que brinda a los docentes directrices claras sobre lo que deben enseñar y lo que se espera que aprendan los estudiantes.

¿Por qué se considera que el currículo de matemática para el desarrollo de la nación es tan importante? Singapur es una ciudad estado que no cuenta con recursos naturales. Debido a esta falencia, el desarrollo económico del país depende del desarrollo de sus recursos humanos. Por lo tanto, no es tan extraño que una de las metas de la educación de Singapur sea 'educar a los jóvenes singapurenses que revelan una curiosidad intelectual y se muestran dispuestos a pensar de manera diferente, a resolver nuevos problemas y a crear nuevas oportunidades para el futuro (ME, 2005). El currículo de matemática para la enseñanza básica de Singapur está diseñado para alcanzar esta meta de crear una nación en la cual cada ciudadano haya sido educado hasta su máximo potencial.

En este capítulo, el propósito es estudiar y entender cómo el currículo de matemática cultiva y apoya una sociedad educada que es capaz de enfrentar los desafíos de un mundo en constante cambio. Por lo tanto, toma particular importancia comprender cómo el currículo apoya la capacidad de los niños para resolver problemas. En las próximas cuatro secciones, el orden será el siguiente: primero se presentan las metas de la enseñanza de matemática en Singapur. Luego se hará referencia al marco que sostiene la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación básica. Después, se analizarán las características únicas del currículo que se busca para la matemática de la enseñanza básica. Me remito a dos conjuntos de documentos, *Mathematics Syllabus-Primary 2001* y *Mathematics Syllabus-Primary 2007*, donde el primer documento otorga una base para gran parte del segundo. Asimismo, las metas de la enseñanza de la matemática siguen siendo válidas en ambos documentos. En la conclusión, hablo acerca de algunos de los desafíos que enfrentan los docentes a la hora de implementar el currículo y ofrezco algunas sugerencias sobre cómo se podrían superar.

Metas de la educación matemática

¿Por qué queremos que los niños aprendan matemática? A pesar de que al parecer lo que más preocupa a la gente respecto al aprendizaje de la matemática es el éxito que tienen los niños en las evaluaciones, las metas de la educación matemática, como se señala a continuación, comprenden una visión más amplia e integral de la matemática y de su aprendizaje. En esta visión, el aprendizaje va más allá de aprender un conjunto aislado de conceptos, hechos, habilidades y procesos. Por el contrario, en esta visión se promueven las instancias en las que los niños puedan experimentar de forma activa y participar con confianza en el aprendizaje y la aplicación de la matemática. La motivación para esta visión nace, en parte, de la consciencia de que se tiene de la necesidad, cada vez más apremiante, de una sociedad tecnológica que cuente con habilidades de resolución de problemas matemáticos. Por otra parte, esta visión también deriva de las exigencias provenientes de un mundo en constante cambio, donde se espera que los individuos continúen estudiando durante toda la vida. En Singapur, la educación matemática apunta a que los niños sean capaces de:

- adquirir los conceptos y habilidades matemática necesarias para la vida diaria y para el aprendizaje continuo en matemática y en disciplinas relacionadas.
- desarrollar las habilidades de proceso necesarias para la adquisición y aplicación de conceptos y destrezas matemática.
- desarrollar habilidades de resolución de problemas y razonamiento matemático, y aplicar estas habilidades para formular y resolver problemas.
- reconocer y utilizar los vínculos que existen entre las ideas matemática, y entre la matemática y otras disciplinas.
- adoptar una actitud positiva frente a la matemática.
- utilizar con eficacia una variedad de herramientas matemática (incluidas herramientas de tecnologías de la información y la comunicación) en el aprendizaje y la aplicación de la matemática.
- producir un trabajo creativo que se afirme sobre ideas matemática.
- desarrollar la habilidad para razonar de manera lógica, para comunicar ideas matemática y para aprender tanto de manera independiente como en conjunto. (DPDC, 2006)

Marco del currículo de matemática

La enseñanza y aprendizaje de la matemática queda resumido en el marco pentagonal (DPDC, 2006, ver Ilustración 2-1). Este marco muestra los cinco componentes que sostienen la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la educación básica hasta los niveles preuniversitarios. El currículo de matemática de Singapur se ha conceptualizado con la meta principal de permitir que los niños desarrollen sus capacidades de resolución de problemas matemáticos (DPDC, 2005) en una amplia gama de situaciones, incluidos problemas no rutinarios, abiertos o reales. El desarrollo de esta capacidad es indispensable para que los niños:

- adquieran una comprensión conceptual de los conceptos matemáticos y dominen habilidades y procesos.
- desarrollen una actitud positiva frente a la matemática.
- tomen conciencia de sus propias capacidades metacognitivas.

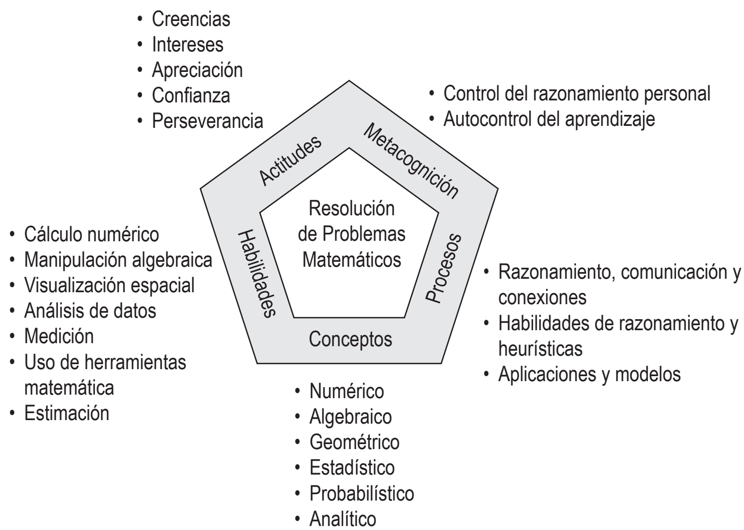


Ilustración 2-1 pentagonal

A continuación se describen cada uno de los cinco componentes.

Conceptos

El currículo defiende la enseñanza orientada hacia la comprensión de conceptos matemáticos, numéricos, geométricos, algebraicos y estadísticos, como un paso para ayudar a que los niños comprendan el razonamiento matemático que sostiene estos conceptos. Se espera que, una vez que los niños aprendan los conceptos matemáticos, estarán mejor preparados para vislumbrar las relaciones entre las ideas y las aplicaciones de estos conceptos en varios contextos, para así mejorar la confianza que tienen al utilizar tales conceptos y su apreciación de la belleza de la matemática. Asimismo, dado que la competencia matemática, incluido el dominio de cálculo, se logra por medio de una comprensión de los conceptos matemáticos (Madsen, Smith y Lanier, 1995), es importante que la comprensión conceptual de los conceptos matemáticos sirva de foco para el aprendizaje de la matemática. Se alienta a los profesores a que brinden a sus alumnos una variedad de experiencias de aprendizaje que les sirva de ayuda para adquirir una comprensión sólida de estos conceptos matemáticos.

Habilidades

Las habilidades necesarias para la resolución de problemas incluyen el cálculo numérico y mental, la visualización espacial, el análisis de datos, el uso de herramientas matemática y las estimaciones. El uso competente de estas habilidades es importante en el proceso de resolución de problemas, por lo que la práctica de estas habilidades no se debería tomar a la ligera. Se alienta a los profesores a que logren un equilibrio entre brindar a los estudiantes la práctica suficiente en el uso de estas habilidades, para que puedan recurrir a ellas cuando las necesiten, y las experiencias que los ayuden a entender que la matemática es más que una aplicación procedimental de habilidades. Encontrar este equilibrio es el problema constante al que se enfrentan todos los profesores del orbe. Varios de los autores que han contribuido en este libro han ofrecido diferentes sugerencias acerca de cómo se puede lograr este equilibrio.

Procesos

Entre los procesos se incluye el razonamiento matemático, la comunicación, el establecimiento de relaciones, las habilidades de razonamiento y las heurísticas. Estas son habilidades de conocimiento necesarias en el proceso de adquisición y aplicación de conocimiento matemático.

Razonamiento matemático, comunicación y establecimiento de relaciones

Un aspecto importante del aprendizaje de la matemática es la aplicación del razonamiento matemático para analizar una situación dada y luego hacer deducciones sobre el problema específico. Tan importante como el aprendizaje de la matemática es lograr que los niños comuniquen sus ideas y razonen de manera coherente y lógica para sí mismos y con sus compañeros, sus profesores y con un grupo más amplio que incluye a los examinadores de evaluaciones formativas y acumulativas. Los niños deben contar con oportunidades en las que puedan utilizar el lenguaje apropiado para justificar sus soluciones y convencer a sus compañeros de que están en lo correcto. El mismo acto de articular lo que piensan puede ayudar al estudiante a aclarar aún más su razonamiento y profundizar su comprensión de los conceptos matemáticos relacionados. Los profesores deben garantizar que ocurran diferentes tipos de comunicación en clases: interacción entre el profesor y los alumnos, entre un alumno y toda la clase, y entre los niños con sus compañeros. En el último caso, cuando los niños comunican por escrito el razonamiento matemático que utilizan en los procesos de resolución de problemas, el profesor obtiene información valiosa acerca del conocimiento matemático de los niños y cómo lo usan. Asimismo, pueden vislumbrar cuál es la disposición que tienen los niños frente a la matemática.

El aprendizaje de la matemática cobra sentido cuando el razonamiento y los procesos matemáticos pueden aplicarse a problemas cotidianos y utilizarse en otras disciplinas que no están directamente relacionadas, como las ciencias sociales y naturales. De esta manera, se recalca el hecho de que la matemática no es específica a un dominio, sino que se aplica en todos los aspectos de la vida. Por lo tanto, si se busca que los niños aprecien la matemática, es necesario entregarles una amplia gama de actividades basadas en ellas.

Habilidades de razonamiento y heurísticas

Los procesos necesarios para resolver problemas incluyen tanto habilidades de razonamiento como heurística. Las habilidades de razonamiento pertinentes a nivel de enseñanza básica incluyen clasificar, comparar, identificar patrones, establecer relaciones y visualizar el espacio. De acuerdo a cómo se utiliza, la heurística se puede clasificar en cuatro categorías generales, según se muestra en la Tabla 2-1.

Tabla 2-1 Categorización de las heurísticas

Categorías	**Ejemplos de heurísticas**
Presentar una representación	Hacer un dibujo, anotar una lista o buscar patrones
Dar una adivinanza	Adivinar, verificar y hacer una suposición
Revisar el proceso	Actuar el problema, ver el problema de manera inversa, visualizar el efecto anterior y posterior
Cambiar el problema	Simplificar el problema, parafrasear el problema, resolver parte del problema

El desarrollo de conceptos, habilidades y procesos específicos se trata en detalle en cada uno de los temas de enseñanza que se presentan en este libro.

Las actitudes y la metacognición, que corresponden a los dos últimos componentes en este libro, son específicos a los niños y no se pueden enseñar como un tema separado.

Actitudes

Los niños que tienen una actitud positiva frente al aprendizaje de la matemática son aquellos que disfrutan de ella y aprecian su poder y belleza. Los niños que tienen confianza en sus conocimientos matemáticos tienden a perseverar cuando confrontan obstáculos durante los procesos de resolución de problemas. Por esta razón, los profesores juegan un rol vital en garantizar una selección diversa de actividades en las que participen niños con diferentes habilidades, además de ayudar a cada niño a cultivar una actitud positiva frente al aprendizaje y la aplicación de la matemática.

Metacognición

La metacognición se refiere a la conciencia que tiene el niño respecto a su capacidad para evaluar y controlar su razonamiento. Los niños ejercitan su capacidad metacognitiva cuando están conscientes de la razón por la cual escogen una estrategia o método en particular para resolver un problema, es decir, saben la razón por la cual algunos métodos no son productivos y deben rechazarse.

En investigaciones se ha demostrado que los niños adquieren a muy corta edad una visión limitada de la matemática y lo que significa utilizarla. No es posible cultivar conductas y actitudes de aprendizaje positivas si las experiencias matemática que tienen los niños se limitan a sumar y completar hojas de ejercicios. Con esas experiencias los niños terminan adquiriendo una noción negativa que equipara a la matemática con un aprendizaje repetitivo y rutinario. No obstante, si sus experiencias con la matemática consisten en ejercicios dentro y fuera de la rutina que los inciten a pensar en la matemática que deben utilizar para resolver un problema, es más probable que adquieran una noción de la matemática que vaya más allá de meramente completar los ejercicios asignados y pasar las pruebas. Los niños aprenden acerca del uso dinámico de la matemática y a verse a sí mismos como capaces de resolver problemas, al tiempo que mejoran sus actitudes frente a la matemática, su enseñanza y aprendizaje y sus capacidades de monitoreo. Para ayudar a fomentar este tipo de estudiantes, el currículo (DPDC, 2006) defiende la entrega de las siguientes actividades de desarrollo:

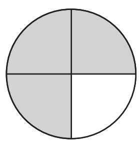
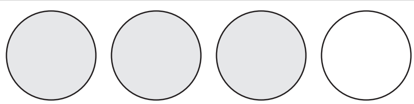
- Brindar a los niños experiencias que les enseñen cuándo y cómo utilizar ciertas habilidades de razonamiento y heurísticas para la resolución de problemas.
- Brindar a los niños oportunidades en donde expliquen al profesor o a sus compañeros, ya sea oralmente o por escrito, cómo resolverían un problema. En este caso, se alienta a los niños a explicar por qué han seleccionado ciertas estrategias (es decir, cómo saben qué es lo que deben hacer).
- En vez de resolver un problema, se les pide a los niños que expliquen qué es lo que harían para resolver el problema.
- Se debe incitar a los niños a que compartan sus soluciones con sus compañeros. Se puede conversar acerca de las razones por las cuales los diferentes enfoques podrían utilizarse para resolver un problema y por qué otras estrategias no servirían.

Las características únicas en el currículo de matemática para la enseñanza básica de Singapur

Un currículo en espiral (Bruner, I960)

El currículo de matemática para la enseñanza básica de Singapur tiene una estructura en espiral con respecto al desarrollo de conceptos, habilidades y procesos. En la Tabla 2-2 se entrega un ejemplo de cómo un tema (fracciones) se desarrolla en el currículo de matemática para la enseñanza básica.

Tabla 2-2 Ideas de fracciones y el curso de educación básica en el que se presenta

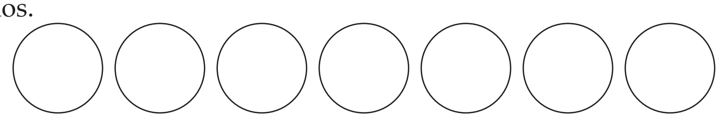
Nivel	Ideas de fracciones
Partes iguales de un entero (2° año de educación básica)	 ¿Qué fracción del círculo se ha sombreado?
Subconjuntos iguales de un conjunto (4° año de educación básica)	 María tenía 4 círculos. Pintó 3 de ellos. ¿Qué fracción de los círculos pintó?

Valores (Modelo del INE)	Los estudiantes de pedagogía en matemática
Un número que expresa una división de un número natural (o fracciones como operador) (5° año de educación básica)	Comparta 3 salchichas equitativamente con 4 niños. ¿Qué fracción de las salchichas recibe cada niño?
Relación entre fracciones y razones (6° año de educación básica)	Abigail, Berta y Carolina compartieron algunos lápices en la razón de 3 : 4 : 5. ¿Qué fracción de los lápices corresponde a la cantidad que recibe Berta?

En el currículo de matemática para la educación básica se trabaja una idea sobre fracciones a la vez, la que puede estudiarse durante un periodo de uno o dos años. Por ejemplo, la idea de fracciones como partes iguales de un entero al principio se enseña en el segundo año de educación básica, y luego se vuelve a estudiar en más detalle en tercero básico, año durante el cual se presenta y estudia el concepto de fracciones equivalentes. Las operaciones que incluyen sumar y restar se comienzan a enseñar de manera informal en segundo básico y luego se enseñan formalmente a un nivel operacional en tercero básico.

En el currículo en espiral, un concepto matemático en particular comienza en un círculo pequeño de la figura. En el nivel siguiente, el espiral se abre cuando se vuelve a estudiar un concepto que ya se había enseñado el año anterior y cuando se presenta un concepto más difícil pero relacionado con el anterior. Se continúa de esta manera hasta que se hayan desarrollado y estudiado todas las ideas relacionadas. Esto significa que los niños cuentan con oportunidades para volver a estudiar los conceptos que aprendieron en años anteriores, y así conocerlos en más detalle. (En el Anexo 2-1 se muestra cuando se presentan por primera vez los objetivos del currículo de matemática para la enseñanza básica y cómo se trabajan durante la educación básica). Volviendo al ejemplo de las fracciones, en cada sección del espiral, los niños tienen la oportunidad de aplicar lo que han aprendido acerca de las fracciones para resolver problemas bien planteados. Por ejemplo, en quinto año de enseñanza básica, se les enseña a los niños la idea de fracciones como operador. Además de ser capaces de aplicar esta idea a números lógicos como 6 ÷ 12, los niños extienden sus conocimientos y habilidades para resolver el siguiente problema, que implica aplicar todos los conceptos, habilidades y conocimientos relacionados.

Corte 7 pasteles en 24 porciones y compártalos equitativamente entre 12 niños.



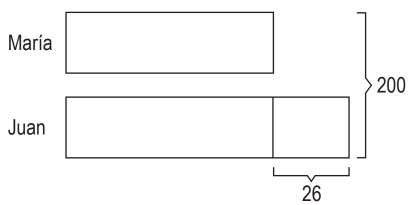
*Fuente: *Primary Mathematics 4A—Teacher's Guide* (DPDC, 1993)

En un principio, este problema parece imposible de resolver, pues es muy probable que los niños piensen que es muy difícil cortar 7 pasteles y que cada uno de los 12 niños reciba una porción de pastel del mismo tamaño, ya que esto significa que cada niño recibe $\frac{7}{12}$ de un pastel. Sin embargo, si se estudia más el problema, se llega a la conclusión de que no es necesario cortar los pasteles en porciones del mismo tamaño. Para resolver este problema, los niños deben utilizar lo que saben acerca de los múltiplos y cómo sumar fracciones relacionadas y no relacionadas, lo que se enseña en los primeros años de educación. Además, como la solución no es única, los niños tienen que ver cuáles dos fracciones sumarán $\frac{7}{12}$ (Consulte el capítulo "La enseñanza de fracciones" donde se detalla cómo enseñar este tema).

El método de modelos

Uno de los métodos heurísticos para la resolución de problemas que forma parte del currículo de matemática para la enseñanza básica es el trazado de modelos. (Consulte el capítulo 'Resolución de problemas' para información más detallada sobre la heurística). Los niños que no saben sobre álgebra pueden utilizar el método de modelos como una técnica visual para resolver problemas verbales del tipo algebraico. El siguiente es un ejemplo de este tipo de problemas:

Juan y María tienen 200 balones entre los dos. Juan tiene 26 más balones más que María. ¿Cuántos balones tiene Juan?



En el método de modelos, cada rectángulo, conocido como unidad, representa un número desconocido. Para encontrar el valor del número desconocido primero se debe resolver el valor de la unidad.

Razonamiento algebraico

El desarrollo del razonamiento algebraico también es otra característica distintiva del currículo de matemática para la enseñanza básica en Singapur. En los dos ejemplos siguientes preparados para primero básico, se les pide a los niños que completen la secuencia de números y que continúen el patrón geométrico.

Patrón numérico

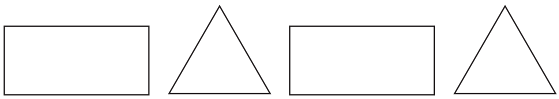
¿Cuáles son los números que faltan?

(a) _, 17, 18, 19,_21

(b) 2, 4, 6,_, 10, 12,_

Patrones geométricos

Estas formas siguen un patrón. Dibuja la quinta forma.



En un currículo en espiral, en cada nivel se presentan actividades similares, y cada una de estas actividades complementa los conceptos ya aprendidos y permite, a su vez, estudiarlos en detalle en un nivel superior. Esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo, el cual está dirigido a alumnos de cuarto año de enseñanza básica.

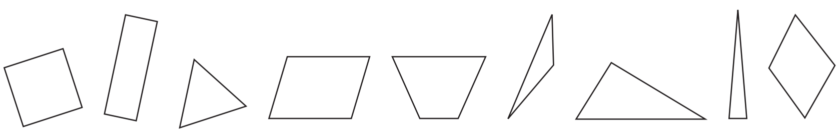
Patrón numérico

Completa los siguientes patrones numéricos:

(a) 6780, 6880,__,__, 7180

(b) 11, 10.95, 10.9,__, 10.8,__, 10.7

Patrones geométricos



Clasifica estas formas de tantas maneras como sea posible. En cada caso, explica la regla que utilizaste.

Plan de estudio diferenciado

El plan de estudio contiene los temas que se deben enseñar en cada nivel de educación básica. Los planes de estudio para la educación básica se dividen en dos niveles: un plan en común para primero a cuarto básico y un plan de estudio diferenciado para quinto y sexto básico, en el cual se dedica más tiempo del currículo a la enseñanza a los grupos que requieren más apoyo. En la Tabla 2-3 se muestra el tiempo recomendado que se debe dedicar para la enseñanza de matemática, de acuerdo con los diferentes niveles y grupos (DPDC, 2006).

Tabla 2-3 Tiempo asignado en el currículo de acuerdo con los niveles y ramas

Niveles	Número de horas por semana
Plan de estudio común	
1° año de educación básica	3,5 horas
2° año de educación básica	4,5 horas
3° y 4° año de educación básica	5,5 horas
Plan de estudio diferenciado (5° y 6° básico)	
Matemática estándar	5 horas
Matemática fundacionales	6,5 horas

Tabla 2-3 Tiempo asignado en el currículo de acuerdo con los niveles y ramas

En cada nivel de educación básica, el plan de estudio se divide en los siguientes temas de enseñanza: números naturales, fracciones, decimales, dinero, mediciones, estadística, geometría, porcentaje, velocidad, proporciones y álgebra. Consulte el Anexo 2-2 para información más detallada sobre los temas de enseñanza diferenciados.

Enfoques de enseñanza

Se alienta a los profesores a que utilicen una mezcla de métodos de enseñanza al momento de enseñar el contenido curricular. Como se hace hincapié en una conceptualización matemática integral, es primordial seleccionar actividades apropiadas que promuevan una comprensión integral. En lo posible, las actividades deberían permitir que los alumnos progresen desde un nivel de comprensión concreto y basado en imágenes a un nivel de representación abstracto. Es de suma importancia para el currículo que la enseñanza esté orientada a la comprensión de conceptos. Cuando se utilizan materiales concretos, se debe dedicar tiempo para explicar cómo estas representaciones concretas se relacionan con sus formas abstractas. Se deben establecer vínculos entre las tres representaciones que se describen en el capítulo 'Enseñanza y aprendizaje'.

Los métodos de enseñanza pueden comprender desde una enseñanza directa, en donde los profesores enseñan el contenido del currículo por medio de la exposición, hasta trabajo grupal colaborativo y trabajo independiente, en donde los niños participan en una amplia gama de actividades. En los grupos colaborativos, los niños aprenden a poner conceptos a prueba, a conjeturar, a explorar, a justificar y a evaluar y convencer a sus compañeros de los hallazgos encontrados. Por lo tanto, en los grupos colaborativos se utiliza el lenguaje no solo para comunicarse sino además para leer y escribir, lo que los niños pueden utilizar cuando trabajan de manera independiente. Entre las actividades se podrían incluir la práctica de conceptos y habilidades enseñadas, la resolución de problemas cotidianos y no cotidianos, la investigación de la estructura de la matemática y la forma como la matemática se presentan en el entorno. Los libros escolares de matemática no son la única fuente de materiales curriculares. Los profesores pueden utilizar diarios y artículos de revistas universitarias, materiales en Internet, programas en CD-ROM e incluso el entorno natural como fuentes posibles de materiales pedagógicos para ayudar a que los niños entiendan el alcance y el poder de aplicar la matemática.

La reducción del tamaño de los cursos para el primer y segundo año de enseñanza básica, en los años 2005 y 2006 respectivamente, le ha brindado a los profesores la oportunidad de revisar la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los años fundacionales. El Proyecto SEED (Estrategias para la participación y desarrollo eficaz de los alumnos en las escuelas de enseñanza básica) es una oportunidad magnífica para que los profesores aprovechen al máximo los beneficios de enseñar a un grupo de alumnos reducido, pues ahora pueden replantearse sus enfoques pedagógicos con el fin de mejorar el aprendizaje de los alumnos. Como SEED es un proyecto escolar, no cuenta con métodos de enseñanza prescritos y cada escuela tiene la libertad de crear el programa que mejor se ajuste a las necesidades de sus alumnos.

El rol de las tecnologías de la información y comunicación (TIC)

Los profesores cuentan con una gama de TIC para ayudar a que los niños se motiven y participen en el proceso de aprendizaje. Entre estas herramientas se encuentran aplicaciones para computadores, hojas de cálculo y programas de geometría dinámicos como el Geometers Sketchpad (GSP).

En mi opinión, se debería alentar el uso de calculadoras, especialmente en alumnos de quinto y sexto año de enseñanza básica. El uso de calculadoras en ciertas actividades matemática significa que los niños pueden participar en razonamientos más sofisticados, en donde lo importante no son las habilidades de procedimientos sino más bien el razonamiento matemático que se sigue para resolver problemas complejos, ya sean reales o puramente matemáticos. Por lo tanto, los profesores deben asegurarse de no desatender al desarrollo de las habilidades apropiadas ni al cálculo mental ni escrito.

Educación Nacional

Para cultivar y profundizar el sentido de identidad nacional en los niños, se podrían utilizar temas actuales y relevantes relacionados con la matemática, los que se podrían integrar a la enseñanza y el aprendizaje. Estos ejemplos se podrían utilizar en un contexto de resolución de problemas o presentarlos como un proyecto de enseñanza.

Evaluación

Las evaluaciones forman parte esencial del proceso de enseñanza y aprendizaje y su objetivo principal es mejorar la enseñanza y el aprendizaje. La evidencia que se obtiene de las evaluaciones debería servir para que los profesores vean la eficacia de sus métodos de enseñanza. Asimismo, esta evidencia sirve para que los profesores vean el conocimiento y capacidad que tienen los niños para aplicar la matemática, al igual que la actitud con la que enfrentan la asignatura. La eficacia del currículo para formar niños que son capaces de resolver problemas de manera eficaz también se ve reflejada en el desempeño de los niños. Los resultados de las evaluaciones les permiten a los niños reconozcan sus fortalezas y debilidades en las diferentes áreas de la matemática, al tiempo que les ayuda tanto a ellos como a los profesores a identificar las áreas que se deben reforzar.

Las evaluaciones se deberían llevar a cabo en diferentes formatos, para que los niños con diferentes tipos de inteligencia y estilos de aprendizaje puedan demostrar lo que han aprendido y lo que son capaces de hacer. El currículo de matemática de Singapur está diseñado para que se incorpore los siguientes aspectos en las evaluaciones cuando sea apropiado.

- Cálculo mental
- Comunicación matemática
- Aplicación práctica de la matemática
- Investigación y resolución de problemas
- Aplicación de las TIC

Se describen dos tipos de evaluaciones: evaluación continua (EC) y evaluación semestral (ES).

Evaluación continua

La evaluación continua debería formar parte de la enseñanza y proceso de aprendizaje diario. Las evaluaciones continuas (EC) sirven para que los profesores vean si los programas y métodos de enseñanza que están utilizando son eficaces. La evidencia que se obtiene de las EC sirve para que los profesores identifiquen áreas de dificultades o comprensión errónea que los niños puedan tener. De esta manera, los profesores pueden elegir mejor los procesos que sirvan para corregir estas falencias. Dado que son evaluaciones rutinarias, los niños reciben una retroalimentación inmediata en su progreso dentro del proceso de aprendizaje. La confianza que tienen los niños en sí mismos como aprendices y usuarios de la matemática aumenta cuando se enfocan en lo que son capaces de hacer, en vez concentrarse en sus fracasos.

Evaluación semestral

En las evaluaciones semestrales (ES) se incluyen dos evaluaciones formales realizadas que las escuelas toman de forma regular: exámenes a medio semestre y exámenes a fin de año. Las ES permiten apreciar cuánto del currículo han aprendido los niños. Por lo tanto, estas evaluaciones cubren harta materia, de manera comprehensiva, donde se evidencia el contenido y énfasis de los programas de estudio enseñados. En el capítulo sobre evaluaciones se describe más en detalle este tema.

Conclusiones

El currículo de matemática recién descrito puede parecer muy diferente de lo que los estudiantes de pedagogía experimentaron ellos mismo cuando estaban aprendiendo sobre el tema. Los estudiantes de pedagogía tienen sus propias opiniones respecto a la matemática y la enseñanza y aprendizaje de la misma, que por lo general provienen de sus propias experiencias de cuando ellos mismos se encontraban aprendiendo matemática en la escuela. Las experiencias que ellos han tenido con la enseñanza de la matemática consisten en un profesor en frente diciéndoles a sus alumnos cómo tienen que hacer matemática. Por su lado, los alumnos escuchan con atención lo que se les enseña y aplican los conceptos a preguntas estándares. Cualquier estudiante de pedagogía que mire los contenidos del currículo actual de matemática para la enseñanza básica se sentirá inseguro de sus capacidades de implementar lo que se intenta enseñar en este currículo.

No solo deben enseñar el contenido matemático estándar, por ejemplo enseñar a sumar y restar números, sino que además deben enseñar heurísticas y habilidades de razonamiento, junto con tareas matemática que incluyen problemas no rutinarios e investigaciones matemática, ejercicios que quizás no conocen muy bien. Además de todo lo anterior, los estudiantes de pedagogía tienen que ayudar a los niños a desarrollar actitudes positivas frente a la matemática, lo que los puede ayudar a pensar de manera metacognitiva y estar conscientes de la manera en que razonan. Muchos de los estudiantes de pedagogía sufren de ansiedad matemática, por lo que les puede resultar difícil inspirar a los niños a que tengan actitudes positivas frente al tema. Sin embargo, muchos de los estudiantes de pedagogía han dicho que su propia ansiedad frente a la matemática les ha ayudado a entender mejor las necesidades de aquellos niños que sienten la misma aprehensión. Por lo tanto, es importante reconocer nuestras propias experiencias y tratar de crear entorno y experiencias de aprendizaje positivas para los niños que se encuentran aprendiendo matemática.

Una vez que ya están trabajando como profesores, los estudiantes de pedagogía se dan cuenta rápidamente de que el tiempo asignado en el currículo siempre es un recurso limitado. No es fácil equilibrar el tiempo que se dedica a enseñar las heurísticas, las habilidades de razonamiento y la resolución de problemas no rutinarios con el tiempo que se debe consagrar a la enseñanza de conceptos, habilidades y procesos básicos. Siempre existirá el problema de equilibrar el tiempo que se dedica a cada aspecto del currículo. No obstante, no se espera que los profesores enseñen todo el contenido del currículo en una sola clase. Las experiencias de enseñanza y aprendizaje que promueve el currículo deberían durar todo el periodo que los niños van a la escuela. En las escuelas se han implementado programas estructurados para ayudar a los profesores a enseñar lo que se incluye en el currículo. Los profesores podrían probar nuevos materiales cada cierto tiempo, como por ejemplo un problema nuevo por semana o cada dos semanas. Esto les permitirá descubrir cuáles son los mejores métodos de enseñanza que se podrían utilizar para esos problemas, y entender la matemática que se deben utilizar. La clave reside en no hacer todo al mismo tiempo.

Los estudiantes de pedagogía que se gradúan pueden continuar adquiriendo más conocimientos asistiendo a cursos impartidos en instituciones como el Ministerio de Educación y el NIE. Asimismo, pueden aprender de sus colegas con más experiencia laboral, quienes han logrado implementar con éxito muchos aspectos del currículo en sus métodos de enseñanza.

Referencias

Bruner, J. S. (1960). *Readiness for learning. en The process of education* (pp. 33-54). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (1993). Primary mathematics 4A - teacher's guide. Singapur: Publicaciones federales.

DPDC (2000). *Mathematics syllabus-primary 2001*. Singapur: Ministerio de Educación

DPDC (2006). *Mathematics syllabus-primary 2007*. Singapur: Ministerio de Educación

Madsen, A. L,, Smith, P. & Lanier, P. (1995). *¿La enseñanza orientada a los conceptos mejora la capacidad de cálculo?* Focus on Learning Problems in Mathematics 17(4), 43.

Ministerio de Educación. (2005). *Resumen*. Rescatado el 30 de mayo de 2005, de http://www.moe.gov.sg/corporate/overview.htm. Ministerio de Educación. (1996).

Ministerio de Educación, Informe nacional para Singapur (Población 2). Tercer Estudio Internacional de Matemática (TIMSS). Singapur: División de Investigación y Evaluación, Ministerio de Educación.

Anexo 2-1

Objetivos del currículo de matemática para la enseñanza básica*. Primero a cuarto, quinto y sexto año de educación básica (incluyendo el Programa Fundacional).

	Objetivos / Niveles	1º	2º	3º	4º	5º	6º	5º	6º
								P. Fundac.	
1	Fomentar la comprensión de conceptos matemáticos:								
	• Numérico	•	•	•	•	•	•	•	•
	• Geométrico	•	•	•	•	•	•	•	•
	• Estadístico	•	•	•	•	•	•	•	•
	• Algebráico	•	•	•	•	•	•	•	•
2	Reconocer relaciones espaciales en dos y tres dimensiones	•	•	•	•	•	•	•	•
3	Reconocer patrones y relaciones en matemática	•	•	•	•	•	•	•	•
4	Utilizar sistemas de unidades comunes	•	•	•	•	•	•	•	•
5	Utilizar lenguaje, símbolos y diagramas matemáticos para representar y comunicar ideas matemática	•	•	•	•	•	•	•	•
6	Realizar operaciones con:								
	• Números naturales	•	•	•	•	•	•	•	•
	• Fracciones		•	•	•	•	•	•	•
	• Decimales				•	•	•	•	•
7	Utilizar instrumentos geométricos				•	•	•	•	•
8	Realizar ejercicios algebraicos simples								
9	Desarrollar la capacidad de realizar cálculos mentales	•	•	•	•	•	•	•	•
10	Desarrollar la capacidad de realizar estimaciones		•	•	•	•	•	•	•
11	Desarrollar la capacidad de revisar la veracidad de los resultados				•	•	•	•	•
12	Presentar e interpretar información de forma escrita, gráfica, y en diagramas y formulario tabulares	•	•	•	•	•	•	•	•
13	Utilizar los conceptos matemáticos aprendidos para resolver problemas	•	•	•	•	•	•	•	•

	Objetivos / Niveles	1º	2º	3º	4º	5º	6º	5º P. Fundac.	6º P. Fundac.
14	Utilizar la heurística adecuada para resolver problemas	•	•	•	•	•	•	•	•
15	Utilizar la matemática para resolver problemas cotidianos	•	•	•	•	•	•	•	•
16	Pensar de manera lógica y deducir conclusiones				•	•	•	•	•
17	Fomentar una actitud inquisitiva por medio de actividades de investigación	•	•	•	•	•	•	•	•
18	Disfrutar al aprender matemática mediante una variedad de actividades	•	•	•	•	•	•	•	•

*Fuente original: Mathematics Syllabus Primary 2007 (DPDC, 2006)

Anexo 2-2

Temas de enseñanza diferenciados

Temas abordados en el plan de estudios de matemática para la educación básica en el Programa Fundacional y el Programa Estándar.

Temas	Estándar	Fundacional
NÚMEROS NATURALES Notación numérica y notación posicional hasta diez millones	✔	✔
Comparar y ordenar números hasta cien mil (100.000)	✔	✔
Suma y resta de números de hasta 3 dígitos	✔	✔
Suma y resta de números de hasta 4 dígitos	✔	
Multiplicación y división de un número de dos dígitos por un número de un dígito	✔	✔
Multiplicación y división de números de cuatro dígitos por un número de un dígito Multiplicación de un número de tres dígitos por un número de dos dígitos	✔	–
Multiplicación y división por decenas, centenas y milésimas	✔	
Factores y múltiplos	✔	✔
Aproximaciones y estimaciones	✔	✔
Orden de las operaciones y el uso de paréntesis	✔	
FRACCIONES Concepto de fracciones: • Fracción de un entero • Fracción de un conjunto de objetos • Un número natural dividido por otro	✔	✔
Fracciones equivalentes	✔	✔
Fracciones impropias y números mixtos	✔	✔
Comparación y orden de las fracciones	✔	✔
Suma y resta de fracciones propias	✔	✔
Suma y resta de números mixtos	✔	✔
Multiplicación de una fracción propia por un número natural	✔	✔
Multiplicación de dos fracciones propias	✔	–
Multiplicación de una fracción impropia por una fracción propia o impropia	✔	–
Multiplicación de un número mixto por un número natural	✔	–
División de una fracción propia por un número natural	✔	✔
División de un número natural/fracción propia por una fracción propia	✔	–

Temas	Estándar	Fundacional
División de un número natural/fracción propia por una fracción propia	✔	✔
DECIMALES Notación posicional y numérica hasta 3 decimales	✔	✔
Comparar y ordenar decimales	✔	✔
Conversión de fracciones a decimales y viceversa	✔	✔
Suma y resta de número con hasta dos decimales	✔	✔
Multiplicación y división de un número con hasta 1 decimal por un número natural de un dígito	✔	✔
Multiplicación y división de un número con hasta 3 decimales por decenas, centenas y millares.	✔	–
División de un número natural por un número entero con una solución en forma decimal	✔	✔
Aproximaciones y estimaciones	✔	✔
DINERO, MEDIDAS Y MEDICIONES Unidades de longitud, masa, tiempo, área y volumen	✔	✔
Duración de intervalos de tiempo	✔	✔
Cuatro operaciones con dinero en notación decimal	✔	✔
Cuatro operaciones con longitud, masa, tiempo y volumen de líquido con las mismas en unidades	✔	✔
Cuatro operaciones con longitud, masa, tiempo y volumen de líquido en unidades compuestas en forma decimal	✔	✔
Conversión de mediciones de una unidad más pequeña de medición a una unidad más grande en forma decimal, y viceversa	✔	✔
Perímetro de figuras rectilíneas	✔	✔
Área y perímetro de un cuadrado, un rectángulo y un triángulo	✔	✔
Área y perímetro de un círculo, un semicírculo y un cuadrante	✔	–
Área y perímetro de una figura relacionada con un cuadrado, un rectángulo y un triángulo	✔	–
Área y perímetro de una figura relacionada con un cuadrado, un rectángulo un triángulo, un círculo un semicírculo y un cuadrante	✔	–
Encontrar una dimensión de un rectángulo tomando en cuenta la otra dimensión y su área y perímetro, el largo de un lado de un cuadrado tomando en cuenta su área y perímetro	✔	–
Volumen de un líquido	✔	✔

Temas	Estándar	Fundacional
Volumen de un sólido conformado por unidades cúbicas	✔	✔
Volumen de un cubo y un paralelepípedo	✔	✔
Volumen de un sólido relacionado con un cubo paralelepípedo	✔	
Encontrar • el largo de un lado de un cubo tomando en cuenta su volumen • una dimensión de un paralelepípedo tomando en cuenta su volumen y las otras dimensiones • la altura de un paralelepípedo tomando en cuenta su volumen y el área de la base • el área de una cara de un paralelepípedo tomando en cuenta su volumen y una dimensión	✔	–
ANÁLISIS DE DATOS Tablas	✔	✔
Gráficos de barra	✔	✔
Gráficos de línea	✔	✔
Gráficos circulares	✔	✔
Promedio de un conjunto de datos	✔	✔
GEOMETRÍA Formas y patrones	✔	✔
Medición de ángulos en grados	✔	✔
Líneas perpendiculares y paralelas	✔	✔
Ángulos: ángulos rectos, ángulos en una recta, ángulos opuestos verticales y ángulos en un vértice	✔	✔
Propiedades de un cuadrado, un rectángulo y un triángulo	✔	✔
Propiedades de un paralelogramo, un rombo y un trapecio	✔	–
Construcción geométrica de un cuadrado, un rectángulo y un triángulo	✔	✔
Construcción geométrica de un paralelogramo, un rombo y un trapecio	✔	–
Brújula de 8 puntos	✔	–
Simetría	✔	–
Redes	✔	–
Teselaciones	✔	–
PORCENTAJE Expresar una parte de una cantidad como un porcentaje	✔	✔

Temas	Estándar	Fundacional
Expresar fracciones y decimales como porcentajes, y viceversa	✔	✔
Encontrar un porcentaje de un entero	✔	✔
Encontrar el entero tomando en cuenta la parte y el porcentaje	✔	–
Encontrar descuentos, impuestos e intereses anuales	✔	✔
Encontrar aumento o disminución de un porcentaje	✔	–
VELOCIDAD	✔	–
RAZÓN	✔	–
ÁLGEBRA	✔	–

Capítulo 3
Enseñanza y aprendizaje

Douglas Edge

Rara vez un tema se puede enseñar solo de una manera. Los profesores por lo general tienen que tomar decisiones en relación a la forma en que ayudarán a que sus alumnos aprendan. Estas decisiones implican decidir cuándo decir, cuándo explicar y planificar actividades en donde los niños se puedan explicar la materia unos a otros. El propósito de este capítulo es presentar un modelo relacionado con los procesos de toma de decisiones y examinar las ideas que influyen en esas decisiones.

El modelo de enseñanza

Cuando se les enseña matemática a los niños, el fin es que comprendan lo que están aprendiendo, que reconozcan las funciones importantes que cumplen la matemática y que no olviden lo que aprendieron al poco tiempo (Ashlock et al, 1983). A partir de estas ideas, Ashlock et al. hacen hincapié en que la planificación de las clases se debe basar en una teoría sólida. Consideran importante conectar los objetivos de contenidos de enseñanza con los tipos de actividades de aprendizaje que corresponde.

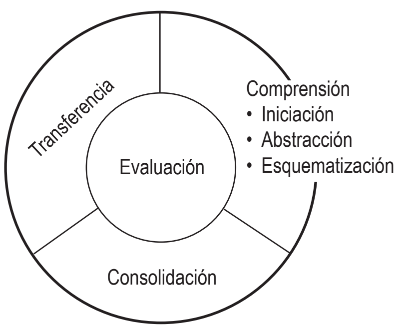


Ilustración 3-1 Modelo de enseñanza con sus cuatro tipos de actividades

El modelo original de Ashlock et al. está compuesto de seis partes, las que se llaman tipos de actividad. Las primeras tres partes se enfocan en los tipos de actividades que los profesores planifican para ampliar la comprensión conceptual de los niños, y que van desde ideas introductorias a comportamientos de búsqueda de patrones complejos. Las tres partes que restan cubren actividades para practicar y recordar, resolución de problemas y aplicaciones y, en el centro, la evaluación. En la Ilustración 3-1 se presenta una adaptación del modelo, donde en esencia los tres primeros tipos de actividades del modelo han dado lugar a uno, que se ha llamado "comprensión".

Aplicación del modelo de enseñanza

Cuando se utiliza el modelo de enseñanza para planificar una clase, cada parte del modelo tiene su propio objetivo y, por ende, su propio tipo de actividades. Consideremos una parte a la vez, comenzando con la comprensión.

La comprensión

El objetivo de esta parte del modelo tiene tres aristas: presentar a los niños un concepto, dejar que lo integren o que extraigan una comprensión general del concepto y lograr que encuentren patrones o relaciones dentro del concepto. Consideremos, por ejemplo, una clase sobre relaciones numéricas con las combinaciones del seis al diez, en donde se presuma un conocimiento previo de las combinaciones hasta el cinco[1]. Un profesor puede dar a sus alumnos un conjunto de seis bloques o contadores y pedirles que los dividan en grupos. Para ayudar a los alumnos con esta actividad, se les puede entregar un tablero, como el que se muestra en la Ilustración 3-2. El profesor les puede pedir a los niños que hablen sobre sus historias de números[2]. Este tipo de actividad basada en juegos se llama "iniciación", debido a que los alumnos construyen un nuevo conocimiento a partir de estructuras existentes.

---

1 Las relaciones numéricas de suma que los niños tienen que memorizar son las 100 combinaciones de números de un dígito más un dígito, las que usualmente se organizan en la tabla de adición. De igual forma, hay 100 relaciones numéricas que por lo general se organizan en tablas de multiplicar.

2 El término historia de 'número' se utiliza aquí para sugerir que las historias de los niños vienen de actividades de juego guiadas. En este caso, es probable que las historias sean relaciones numéricas de adición.

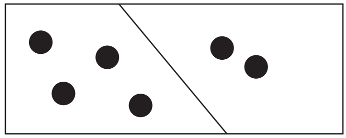


Ilustración 3-2 Tablero de ejemplo para mostrar las relaciones numéricas, en este caso, 4 + 2 = 6

A continuación, el profesor puede sacar provecho del juego en el que participan los alumnos y pedirles que ideen una manera de registrar sus historias de números. Haciendo uso del tablero nuevamente, el profesor les puede pedir que cuenten las historias que han anotado y que escriban las frases numéricas correspondientes. Durante estas actividades, los niños tienen que lograr comprender el concepto, al tiempo que se les enseña vocabulario importante y formas tradicionales de escribir frases numéricas. Luego, los profesores pueden planificar actividades similares que hagan uso de otros materiales, tales como las varas de Cuisenaire y las rectas numéricas, como se sugiere en la Ilustración 3-3. A estas actividades de comprensión de nivel medio se les conoce como 'abstracción'.

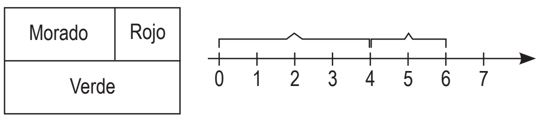


Ilustración 3-3 Varas de Cuisenaire y una recta numérica en la que se muestren 4 unidades más 2 unidades

Una vez que los niños han llegado a comprender en parte el concepto, el profesor puede planificar trabajo adicional, a fin de enfocarse en las relaciones que existen entre los datos fundamentales conocidos. Por ejemplo, y otra vez recurriendo al tablero o a las varas de Cuisenaire, se les puede pedir a los niños que busquen todas las relaciones numéricas que sumen hasta 6 y las escriban en cierto orden. El profesor puede preguntar: "¿Cómo sabemos que no nos hemos saltado alguna relación?" Idealmente, los niños apuntarán al diagrama y responderán diciendo que empezaron con el grupo de 6, por lo que escribieron '6 + 0 = 6'; a continuación, movieron un bloque de la izquierda del tablero a la derecha, lo que les llevó a otra relación numérica, por lo que escribieron '5 + 1 = 6'. 'Seguimos avanzando uno por uno, hasta que llegamos a '0 + 6 = 6'.

Una tarea completamente diferente, pero que requiere que el alumno establezca relaciones entre hechos conocidos, puede ser pedirles que se centren en las familias de relaciones numéricas, tales como 2 + 4 = 6, 4 + 2 = 6, 6 – 4 = 2 y 6 – 2 = 4. Estas actividades de comprensión de orden superior, donde los niños tienen que buscar relaciones de la información, se llaman 'esquematización' en el modelo de enseñanza.

Consolidación

Una vez que los profesores tienen la seguridad de que sus alumnos comprenden los conceptos básicos, pueden planificar actividades de la siguiente parte del modelo. El principal propósito de consolidar es ayudar a los niños a recordar, con rapidez y precisión razonables, los hechos y las destrezas asociadas con el concepto. Ya no se les pide a los niños que expliquen por qué algo es verdad o cómo funciona. Ahora, se pueden utilizar actividades rutinarias de ejercicios repetitivos, donde se incluye el uso de tarjetas didácticas. Algunos profesores crean juegos sencillos u organizan situaciones donde los niños pueden

poner en práctica sus habilidades. Los siguientes tipos de juegos, que se pueden apreciar en la Ilustración 3-4, con el tiempo se convierten en parte del repertorio cotidiano de un profesor experimentado:

- Subir la escalera: relaciones numéricas escritas en cada peldaño; los niños responden para 'subir la escalera' lo más rápido que puedan.
- Ganarle al rebote: el profesor tira un balón al suelo y dice una relación numérica al mismo tiempo; la idea es que los niños contesten antes de que la pelota toque el suelo.
- Zum: los niños tienen que contar, y si el número es la suma o el producto de un número predeterminado, entonces tienen que decir 'zum' en vez del número. Por ejemplo, si están practicando la tabla de multiplicación de 6, uno puede contar... 4, 5, zum, 7, 8, 9, 10, 11, zum, 13, 14,...

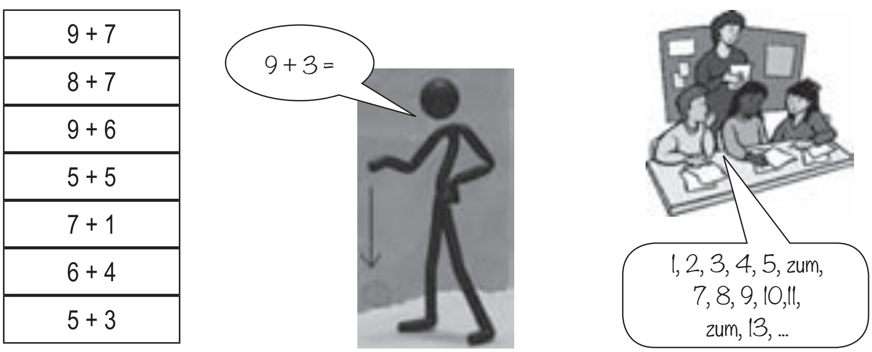


Ilustración 3-4 Actividades de consolidación: subir la escalera, ganarle al rebote y zum

Otra actividad importante de consolidación es reforzar el progreso de los alumnos y ayudarles a tener conciencia del mismo. Por ejemplo, los profesores pueden pedir a sus alumnos que preparen gráficos de barra para hacer un seguimiento de sus mejoras respecto a las relaciones numéricas. Para comenzar, un profesor puede seleccionar diez relaciones numéricas diferentes (una mezcla de dificultad fácil y difícil) de un conjunto de tarjetas didácticas. A los niños se les muestran una serie de estas tarjetas durante 5 segundos. Después de terminar su trabajo y verificar las respuestas, se les pide a los alumnos que registren el número correcto de respuestas que tuvieron en un gráfico de barras. Esta actividad se puede repetir durante varios días seguidos haciendo uso del mismo conjunto de tarjetas didácticas, pero en un orden diferente. Se espera que al finalizar la semana, los niños no solo hayan mejorado, sino también hayan sido capaces de observar su propio progreso. En la Ilustración 3-5 se destaca un resultado optimista.

Transferencia

Cuando se planifican actividades con esta parte del modelo en mente, se da por sentado que los niños comprenden bien los conceptos y que logran, dentro de lo razonable, recordarlos con precisión y dominarlos bien. Por ende, ahora lo importante es preparar tareas en las que los alumnos apliquen su conocimiento a nuevas situaciones. Las tareas típicas comprenden la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios, lo que incluye utilizar la heurística que nos es familiar gracias al trabajo de George Polya (1973). Los niños pueden participar en juegos que requieran algún elemento de estrategia o tópicos de estudios que despierten un interés especial en la matemática. Se les puede pedir que realicen investigaciones o proyectos específicos. Lo que se busca es que utilicen sus nuevas habilidades en relación con los usos diarios de la matemática.

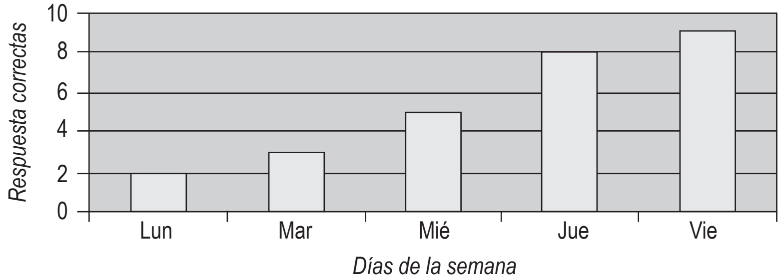


Ilustración 3-5 Gráfico de barras que muestra la mejora en las relaciones numéricas

A veces, la línea entre lo que constituye aplicar nuevo conocimiento (transferencia) y desarrollar una primera comprensión de los nuevos conceptos (comprensión) se vuelve borrosa. Por ejemplo, preguntar a los niños qué se le puede sumar a 4 para llegar a 6 puede ser una actividad de transferencia para la suma (resolución de problemas), pero también puede ser una actividad introductoria para trabajar los conceptos de la resta. Tales actividades se pueden clasificar como 'transferencia' o 'iniciación'.

Evaluación

El modelo no tiene forma de una rosquilla: no hay un hoyo en el medio. La evaluación se debe comprender como una parte central e integral del proceso de enseñanza y aprendizaje. A veces, la evaluación es formal, en el sentido de fijar pruebas y exámenes al final del semestre, tales como el Examen de Egreso de la Educación Básica (PSLE) al final del sexto año. Otras veces, la evaluación es informal, en el sentido de que se obtiene información del trabajo en clases, las tareas para la casa, las respuestas en clases y los controles diarios. Una tercera forma de evaluación que también es clave dentro del proceso de aprendizaje corresponde a la evaluación de diagnóstico. La evaluación de diagnóstico puede o no utilizar procedimientos formales. Los profesores pueden haber diseñado una clase para repasar conocimientos básicos ya adquiridos (consolidar) pero, a medida que avanza la clase, comienzan a sospechar que los niños tienen algunas dificultades conceptuales (evaluación-diagnóstico). Ante tal circunstancia, un profesor puede decidir volver a una parte anterior del modelo (comprensión). Toda nuestra comprensión de la taxonomía de Bloom et al (1956) y la adaptación que se hizo en Singapur utilizando los niveles de conocimiento, comprensión y aplicación (DPDC, 1996) calzan directamente en esta parte del modelo de enseñanza.

Modelo de enseñanza: otro ejemplo

Revisemos el modelo con otro conjunto de conceptos: la notación posicional. Para promover los distintos niveles de comprensión, un profesor, utilizando bloques multibase, puede dar a sus estudiantes una pila de cubos pequeños y pedirles que digan cuántos podría haber en ese montón. Después de preguntar '¿Hay alguna manera sencilla de llevar la cuenta de los bloques que ya contamos?', se puede alentar a los niños a que pongan bloques en pilas de tamaños similares y que cuenten por grupos (iniciación o primera comprensión).

Posteriormente, el profesor puede presentar las barras que representan las decenas, lo que implica mostrar a los niños que diez cubos pequeños son equivalente a una 'barra de decena' y explicar dos cosas: que son lo mismo porque son valores equivalentes y que son *diferentes* porque uno corresponde a un conjunto de diez y el otro corresponde a diez objetos de uno. Se les debe pedir a los niños que cuenten de nuevo utilizando los bloques multibase. A continuación, pueden modelar 45 utilizando 4 decenas y 5 unidades (Ilustración 3-6) o 364 utilizando 3 centenas, 6 decenas y 4 unidades. Los niños deberían ser capaces de hablar sobre el número, de dibujarlo o escribirlo y de explicar que el número comprende grupos de centenas, decenas y unidades (abstracción o comprensión media).

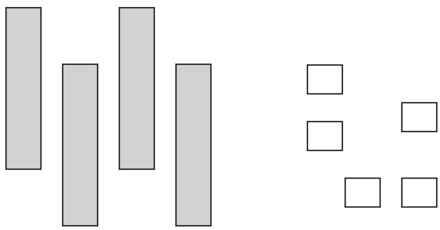


Ilustración 3-6 Modelamiento del número 45 utilizando bloques multibase: una actividad de abstracción

A continuación, el profesor puede pedir a sus alumnos que modelen tanto el número 54 como el 45 (Ilustración 3-7). Luego, puede solicitar a los niños que digan el significado del dígito 5 en 54 (5 decenas) y en 45 (5 unidades). El profesor también puede pedir a los niños que modelen, comenten y comparen los números 402, 42 y 240, lo que implica no solo la notación posicional, sino también las dificultades relacionadas con el cero como un dígito que señala un valor posicional (esquematización o comprensión posterior).

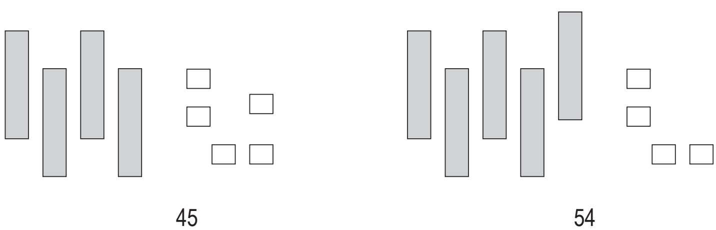


Ilustración 3-7 Modelamiento tanto del 45 como del 54 utilizando bloques multibase: una actividad de esquematización

El siguiente juego es un ejemplo de una actividad de consolidación de notación posicional. Los niños tienen que jugar en pareja. A cada niño se le dan 300 unidades en la forma de tres piezas planas de los bloques multibase. Los niños tiran en turnos un par de dados y multiplican los dos números que salgan. El primer jugador tiene que dar al oponente el número de las unidades que salga, por ejemplo si sale 4 x 6, o 24 unidades, se tiene que separar en unidades y decenas una de las piezas planas, por lo que se practica la notación posicional. Luego es el turno del oponente. El juego termina cuando uno de los niños se ha quedado sin unidades o luego de un periodo fijo de tiempo, por ejemplo 10 minutos. El ganador en este caso corresponde a la persona que acumula la mayor cantidad de unidades.

Para una actividad de transferencia, se puede preguntar a los niños las formas de completar $100 pesos chilenos utilizando monedas de $1, $10 y $100. (1 moneda de $100, diez monedas de $10 o cien monedas de $1 peso). Una tarea de evaluación puede implicar pedir a los niños que cuenten de decena en decena partiendo del 579. Mi propia experiencia ha sido que algunos niños escriben 579, 589, 599, 5109 y 5119. Estos niños parecen que tienen un sentido de los patrones, pero no de las convenciones de notación posicional.

Ideas clave

No hay una teoría única del aprendizaje que trate sobre las distintas decisiones que los profesores tienen que tomar al momento de planificar una clase. Los profesores eficaces utilizan distintas prácticas, las cuales están influenciadas por psicólogos, educadores y matemáticos. Sin embargo, hay dos teorías que cumplen una función importante al momento de planificar actividades de aprendizaje: el *conductismo* y el *cognitivismo*.

El conductismo[3] se enfoca en los resultados observables. El aprendizaje se basa en lo que podemos observar que hacen los niños. Por ejemplo, ellos obtienen una respuesta cuando suman, multiplican dos números para encontrar el área, miden ángulos y dibujan gráficos de barras, actividades que dan resultados observables que podemos, hasta cierto punto, medir. La enseñanza conductista 'formal' se enfoca tradicionalmente en decir o explicar, luego ejercitar y, finalmente, dar retroalimentación específica y de forma relativamente inmediata. Generalmente, la enseñanza orientada hacia el conductismo se presenta en pequeños pasos, de acuerdo con una jerarquía, que va de lo más simple a lo más complejo, y cuyo propósito es establecer vínculos: dado un estímulo (E), se espera una respuesta (R) correcta (Ilustración 3-8).

---

3 De los conductistas importantes, probablemente los más conocidos son Pavlov (1849-1936, que se hizo famoso por el perro que salivaba), Thorndike (1874-1949) y Skinner (1904-1990).

$$E \rightarrow R$$

Ilustración 3-8 Modelo de estímulo-respuesta asociado con el conductismo

Al igual que en el caso del conductismo, el cognitivismo se representa de diferentes formas. Sin embargo, la creencia básica que subyace esta teoría es que los individuos construyen el conocimiento de manera activa, por lo que el conocimiento no se recibe pasivamente de otra persona o de una fuente externa. El enfoque ya no es obtener una respuesta anticipada (conductismo), más bien es prestar atención a la manera de pensar de los niños. Una forma de concebir esta perspectiva es pensar en el modelo E-A-R, donde de alguna manera el estímulo (E) que se presenta es adaptado (A) por el individuo antes de que este responda (R). Por ende, una forma del cognitivismo, el constructivismo, el cual se profundiza luego en la idea clave 4, hace hincapié en que nunca podemos estar seguros de lo que saben los alumnos. Cuando medimos los resultados, solo podemos inferir lo que los alumnos saben.

$$E \rightarrow A \rightarrow R$$

Ilustración 3-9 Modelo de estímulo-adaptación-respuesta asociado al cognitivismo

A continuación se analizan estas teorías en relación con el modelo de enseñanza y cómo repercuten en la enseñanza y aprendizaje de los niños.

Idea clave 1: comprensión

Richard Skemp (1976) se refiere a dos tipos de comprensión: *instrumental*, donde los alumnos conocen las reglas pero no las razones, por lo que saben las cosas de memoria; y relacional, donde los alumnos no solo saben las reglas sino que también pueden explicar cómo funcionan. Pensemos en una situación donde se muestra a los alumnos una hoja con rectángulos y sus unidades de largo y ancho. Se les pide que encuentren el área, por lo que tienen que multiplicar los dos números. Es probable que la mayoría de los niños haga esto correctamente y, por ende, piensen que ya dominan la fórmula del área de un rectángulo. Sin embargo, si a los mismos alumnos se les entrega una regla y una forma rectangular, puede que no sepan qué hacer, es decir, es posible que los alumnos no sepan lo que tienen que medir, ni puedan explicar la relación entre las unidades lineales de largo y ancho con respecto a las unidades cuadradas de área. Se dice que estos niños tienen comprensión instrumental (o procedimental), pero no relacional (conceptual).

Skemp reconoce que en el corto plazo, la enseñanza de la comprensión instrumental es más fácil y puede tener efectos positivos de poca duración. Sin embargo, para llegar a un conocimiento que perdure, la clase debe enfocarse en la comprensión relacional. Consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que nos dan las instrucciones para llegar a un lugar. Por ejemplo, doblar hacia la izquierda, seguir derecho tres cuadras, doblar a la izquierda nuevamente, seguir por un par de cuadras, y así en adelante. En el corto plazo, será capaz de recordar las instrucciones. Sin embargo, si al cabo de algunos días no las recordamos y, por alguna razón, es necesario hacer un desvío, es posible que no sepamos hacia dónde ir. Consideremos esta metáfora en el contexto de los diferentes pasos del proceso de la división.

Naturalmente, en el modelo de enseñanza, el enfoque de una clase de comprensión relacional se mantiene durante las tres partes de los tipos de actividad de comprensión. En el tipo de clase de relaciones numéricas, los niños pueden jugar con bloques o contadores, se les puede pedir que cuenten historias de dos partes ('Tengo 2 bloques aquí y 4 más allá') y luego se les puede preguntar cómo escribieron la historia o cómo lo pueden hacer. A continuación, la enseñanza se puede basar en pedirles a los alumnos que comparen $2 + 4 = 6$ y $4 + 2 = 6$. '¿En qué se parecen estas dos historias?' '¿En qué se diferencian?' Las actividades de enseñanza de este último tipo se enfocan en la comprensión relacional.

Idea clave 2: concreto-pictórico-abstracto

Jerome Bruner[4] (1960) hace hincapié en la idea de que el aprendizaje es un proceso activo, y señala que para que los alumnos adquieran una comprensión conceptual completa, tienen que pasar por tres etapas: representativa, icónica y simbólica. Muchos docentes, incluidos aquellos en Singapur, han rebautizado las tres etapas como concreta, pictórica y abstracta (C-P-A).

Durante la fase de comprensión de nuestro modelo de enseñanza, los niños utilizan contadores de distintos tipos para representar historias sobre relaciones numéricas. De igual forma, los profesores pueden pedir a los niños que dibujen algunas historias sobre las relaciones numéricas que hayan creado o pueden mostrarles algunos ejemplos de dibujos. Luego, se deja registro de las historias. Posteriormente, los profesores

4 En su libro 'The Process of Education', Bruner no solo hizo hincapié en las etapas 'enactivas', icónicas y simbólicas, sino que también se refirió a otros temas, tales como las heurísticas de procesos y la necesidad de un currículo de espiral. Aunque estos temas se discuten en otras partes del libro, los lectores pueden disfrutar de los diálogos y ejemplos que se entregan en la edición original.

pueden pedir a sus alumnos que abran sus textos escolares y examinen las páginas donde se muestren actividades similares y las resuman. Por lo tanto, la actividad concreta planificada por el profesor se extiende a representaciones pictóricas y abstractas utilizando una pizarra blanca y alguna forma de tecnología, y luego se sigue con las actividades pictóricas y abstractas que salen en el libro del alumno y los libros de actividades. En las Ilustraciones 3-10 y 3-11, que se enfocan en la notación posicional, se puede ver la ilustración en la pizarra de los bloques multibase y las distintas formas de registrar el número total de decenas y unidades.

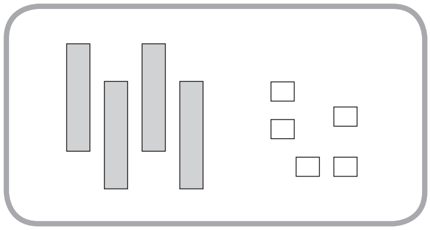


Ilustración 3-10 Profesora muestra 4 decenas y 5 unidades con bloques multibase (etapa pictórica)

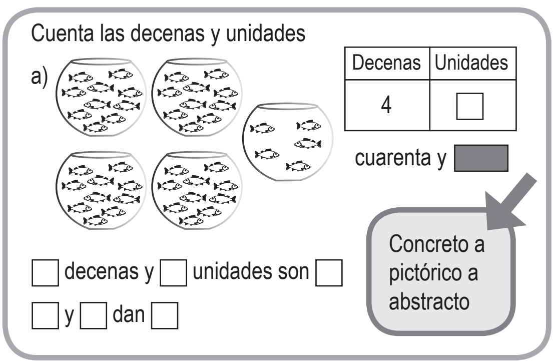


Figura 3-11 Página del texto escolar con un dibujo (cuatro peceras con 10 peces y 1 pecera con 5) y tres formas de notación expandida: 40 + 5 = □, cuarenta más cinco = □, y el formato T con 4 en la columna de las decenas y 5 en la columna de las unidades (pictórica y abstracta).

Idea clave 3: modos de representación de materiales concretos

Zoltan Dienes (1960) también comentaba la importancia de las representaciones multimodales para fortalecer una comprensión relacional. Uno de sus principios, el Principio de Concretización Múltiple (también conocido como principio de Variabilidad perceptiva), postula que siempre que haya materiales concretos para establecer una comprensión relacional, será necesario utilizar más de un material para ejemplificar el concepto. En el caso de la ilustración de las relaciones numéricas, la implicancia del principio es que tenemos que utilizar, por ejemplo, varios tipos de bloques; tal vez se pueden utilizar grupos de niños, conjuntos de lápices, varas de Cuisenaire, y otros similares. Si utilizamos solo un elemento, los niños tienden a asociar algunas características incorrectas al concepto: pueden pensar que la suma de las relaciones numéricas solo sirve para la suma de bloques.

Un segundo principio, el principio de variabilidad matemática, afirma que aun cuando se utilice cualquier material, es importante enfocarse en las características matemática que existen dentro del material. Por ejemplo, algunos profesores preparan cartas numerales, como se muestra en el Diagrama A en la Ilustración 3-12. Cuando se le enseña a un niño la disposición de unos botones, como la que se muestra en el diagrama B, algunos alumnos no reconocen el '3', porque creen que el '3' solo se puede organizar horizontalmente, como la parte '3' del diagrama A.

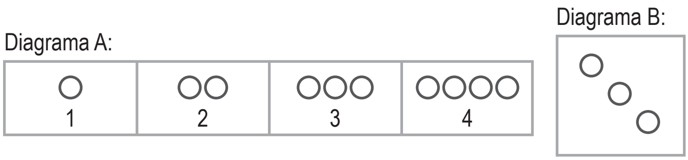


Ilustración 3-12 Variabilidad matemática: cartas numerales que muestran '3'

Para otro ejemplo de una aplicación del principio de variabilidad matemática de Dienes, consideremos los triángulos que se representan en la Ilustración 3-13. Es importante tener presente que todos los triángulos están hechos de un solo material, pero uno de los triángulos tiene un ángulo recto y el otro es relativamente largo y delgado. Solo uno realmente está apoyado sobre su base horizontal. Algunos alumnos piensan que todos los triángulos, excepto por el que está de pie en la base horizontal, están 'dados vuelta' o son muy delgados para ser triángulos. La Ilustración 3-13 ayuda a los alumnos a 'ver' que todos son triángulos y que la orientación no es un atributo de un triángulo.

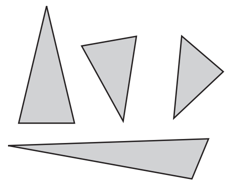


Ilustración 3-13 Variabilidad matemática: triángulos

Es necesario tomar en cuenta que estos dos principios, la Variabilidad perceptiva y la Variabilidad matemática, se han aislado y analizado de forma separada, pero en contextos de aula se consideran al mismo tiempo.

Idea clave 4: maduración y temas de desarrollo

Las estructuras cognitivas son patrones mentales o acciones físicas que corresponden a las etapas de desarrollo de los niños. Jean Piaget (1896-1980) señaló que los niños pasan por cuatro de estas etapas cognitivo-estructurales o de desarrollo primarias (los rangos de edades son aproximados):

- Sensomotora (0 a 2 años): inteligencia basada en las acciones motoras.
- Pre-operacional (3 a 7 años): las decisiones se suelen tomar de acuerdo con la percepción.
- Operacional concreta (8 a 11 años): ahora es posible tomar decisiones intelectuales (pensamiento lógico), pero generalmente deben tener, o deben ser capaces de tener, referentes concretos.
- Operacional formal (12 a 16 años): el pensamiento lógico puede implicar razonamiento abstracto.

Durante la etapa pre-operacional, se indica que las decisiones de los niños suelen basarse en la percepción. A modo de ilustrar este punto, analicemos dos principios de conservación de Piaget[5]. En la Ilustración 3-14, si se les pregunta a adultos cuál de las filas tiene más botones, ellos probablemente dirán que las dos tienen el mismo número. Sin embargo, un niño en la etapa preoperacional contestará que la fila (b) tiene más, porque se 've' más larga. Cuando un niño se encuentra en la etapa operacional-concreta es capaz de pensar que los botones tan solo se han esparcido, y que se pueden juntar (una operación concreta) para ilustrar el mismo monto. Lo anterior significa que el niño ahora es capaz de comprender la idea de conservación de la cantidad.

[5] Los lectores puede revisar Piaget, J., The Child's Conception of Number (Londres: W. W. Norton, 1965) para un ejemplo pertinente.

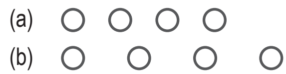


Ilustración 3-14 Conservación de cantidad

La idea de la conservación del largo se muestra en la Ilustración 3-15. En el diagrama A, los niños en la etapa pre-operacional dirán que las varas tienen el mismo largo e incluso cuando ven las varas separándose, como en el diagrama B, responderán que la vara inferior en el diagrama B es más larga ahora. Si además uno las vuelve a juntar, como en el diagrama A, dirán que las varas ahora tienen nuevamente el mismo largo. Es solo cuando los niños se encuentran en la etapa operacional-concreta que se dan cuenta que la vara inferior solo se ha movido, es decir, solo en ese momento serán capaces de entender la idea de conservación del largo. Es la percepción de que la vara inferior en el diagrama B es más larga la que caracteriza el pensamiento de los niños en la etapa pre-operacional.

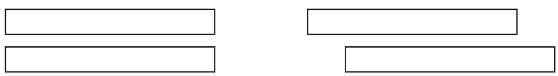


Ilustración 3-15 Conservación del largo

Los niños en los primeros años de escuela se encuentran, generalmente, en la etapa operacional-concreta. Es importante entonces que la planificación del aprendizaje de los niños en esta etapa incluya ya sea materiales fáciles de manipular o situaciones donde sea fácil visualizar los objetos. Consideremos una ilustración de cómo puede afectar la enseñanza de las razones. Una razón de 3 a 5 es 'concreta', en el sentido de que se puede mostrar, por ejemplo, 3 triángulos a 5 cuadrados. De igual forma, una razón de 4 triángulos a 7 cuadrados puede ser 'concreta' (mostrar o dibujar). Es la comparación de la primera razón (las 3 unidades a las 5 unidades) con la segunda (las 4 unidades a las 7 unidades) que no se puede mostrar de forma concreta. La comparación solo se puede hacer 'en la mente', por lo que es abstracta (comparar dos 'pensamientos concretos') y, en consecuencia, 'formal'. En el currículo de Singapur, se debe notar que las razones se enseñan en el quinto año, mientras que las proporciones directas (una comparación entre razones equivalentes) se presenta recién en el sexto año, cuando los alumnos tienen cerca de los 12 años, lo que es coherente con la presteza que tienen los alumnos de comenzar la etapa de desarrollo del pensamiento operacional-formal.

Piaget también indica que para que ocurra aprendizaje, se tienen que poner a los niños en '*un estado de desequilibrio*'. El aprendizaje ocurre cuando las estructuras cognitivas cambian debido a los procesos duales de adaptación: *asimilación* y *conciliación*. Si los niños reciben información y pueden hacerla calzar dentro de sus estructuras existentes, entonces la habrán asimilado. Sin embargo, si los niños tienen que ajustar sus estructuras cognitivas, entonces la estructura debe cambiar, es decir, se debe conciliar para que la nueva información tenga sentido. En el ejemplo anterior, como se muestra en la Ilustración 3-12, si los niños solo ven botones en la disposición lineal, entonces pueden pensar que esta disposición es una propiedad del número. Al mostrarles a los alumnos otras disposiciones, y al decirles que también representan 3, los niños entrarán en un estado de desequilibrio. Este estado puede volver a la normalidad cuando se concilia la información en las estructuras cognitivas que poseen, es decir, la disposición no es una propiedad de los números. De igual forma, con la noción incorrecta del triángulo al revés (ver Ilustración 3-13 y 3-16) los niños pueden llegar a percibir la orientación como una propiedad de la forma. En este caso, para que se desarrollen los aspectos cognitivos y se aprenda la nueva información, y para restaurar el equilibrio, los niños tienen que tomar conciencia de que los triángulos se pueden colocar en cualquier posición y mantener su calidad de 'triángulos'.

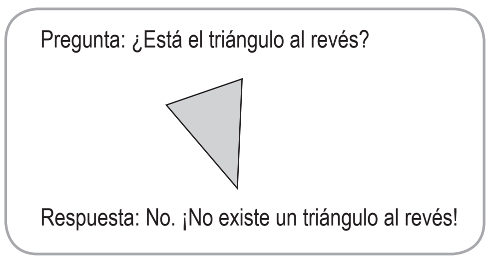


Ilustración 3-16 Desequilibrio en relación a la 'orientación' del triángulo

Idea clave 5: los alumnos como aprendices activos

Aunque el trabajo de Lev Vygostky[6] (1896-1934) no es específico de la matemática, sigue siendo una influencia. Una de las ideas principales es que cuando los niños aprenden, es decir, cuando siguen desarrollando sus estructuras cognitivas, la función de la interacción social es muy importante. La idea clave es que, aun cuando como profesores no podemos construir específicamente estructuras cognitivas para un solo individuo, sí podemos, si planificamos la interacción social, ayudar a nuestros alumnos con

[6] Los lectores se puede referir a Vygotsky, L. 'Thought and Language' (edición corregida) (Cambridge, MA: MIT Press, 1986) para un ejemplo pertinente.

su desarrollo cognitivo. Asimismo, los niños también pueden aprender de libros, de sus compañeros y por medio de actividades iniciadas por ellos mismos.

La base lógica del aprendizaje cooperativo por lo general se justifica al comprender las ideas de Vygotsky relacionadas a la interacción social. Aunque los alumnos pueden poner atención a lo que dice el profesor, lo que necesitan es tener experiencias donde puedan expresar lo que hacen. El argumento es que, de alguna forma, hablar en voz alta con el tiempo se convierte en 'habla privada' y que esto da como resultado la comprensión internalizada.

Además, de acuerdo con Vygostky, los niños tienen que encontrarse en los niveles de desarrollo adecuados para los conceptos que conforman los objetivos de la clase. Específicamente, para aprender, los niños tienen que estar en su *zona de desarrollo próximo* (ZDP). Si un niño o niña se encuentra en una etapa de desarrollo adecuada, es decir, si cuenta con un conjunto apropiado de conceptos básicos, y si se encuentra motivado o motivada a aprender, entonces puede, con ayuda, desarrollar estructuras cognitivas adecuadas y se dice que se encuentra en su zona de desarrollo próximo. Es claro para la mayoría de las personas que a niños de 8 años de edad no se les puede enseñar a comprobar el Teorema de Pitágoras. Sin embargo, cuando los niños cumplen, por ejemplo, 14 años, entonces se encuentran en una etapa más madura de desarrollo y deberían estar mejor dispuestos a aprender este tema. En la Tabla 3.1 se resume este punto. En la parte de capacidades subdesarrolladas, aun con una 'enseñanza perfecta', los niños no pueden aprender el concepto o el proceso. Cuando se encuentran listos en términos de desarrollo es cuando entran en la zona de desarrollo próximo y, con ayuda, les es posible trabajar esta competencia. A la postre, con sus competencias mejoradas, los niños deberían ser capaces de trabajar de forma independiente con la materia estudiada.

Tabla 3-1 Zona de desarrollo próximo

Capacidades poco desarrolladas	Capacidades en desarrollo	Capacidades desarrolladas
Lo que el alumno aún no es capaz de hacer	Zona de desarrollo próximo Lo que el alumno puede hacer con ayuda	Lo que el alumno puede hacer sin ayuda

Idea clave 6: ejercicios y práctica

Los vínculos de estímulo-respuesta se pueden fortalecer con ejercicios y práctica, palabras de aliento, y el trabajo distribuido. A esto se suma la creencia de que es mejor utilizar palabras de aliento que castigar al momento de fortalecer la solidez de los vínculos. Se considera que es útil utilizar palabras de aliento positivas, por ejemplo '¡Bien hecho!' y 'Dado que hoy las tuviste todas buenas, mañana no tienes que trabajar tanto'. Claramente, asignar más ejercicios como castigo a los niños que se portan mal no es correcto.

En nuestro modelo de enseñanza, es posible que los profesores planifiquen actividades de ejercitación y práctica durante la fase de consolidación del modelo, lo que viene después de que los niños comprenden la habilidad o el concepto. Con las relaciones numéricas, la práctica se puede realizar por medio de tarjetas didácticas, hojas de ejercicios, juegos sencillos, actividades de textos escolares y otros ejercicios similares. Para aumentar la rapidez y la precisión de la evocación de conocimiento, se pueden implementar actividades de revisión de 10 minutos al comienzo de la clase en las semanas que sucedan la presentación del tema (ver la actividad de gráfico de barra) y se seguirán revisando, como se puede ver en la mayoría de los textos de estudio bien escritos, por medio de pruebas al final de la unidad, del trimestre y del semestre.

Generalmente se cree que cuando los niños no son capaces de recordar las relaciones numéricas es porque estas fueron mal fundadas, los lazos no fueron bien establecidos o se dejó que las relaciones se olvidarán o se debilitaran. Para remediar estos problemas de aprendizaje, es posible que haya que volver a las actividades de comprensión.

Idea clave 7: mejorando la memoria

Una metáfora que usualmente se utiliza en la teoría del procesamiento de la información es la del computador: información de entrada (el estímulo), procesamiento (la adaptación), resultado (la respuesta) y almacenamiento en la memoria. En esta teoría, hay tres tipos de memoria: la memoria icónica (o registro sensorial), que dura a lo más unos cuantos segundos; la memoria de trabajo o a corto plazo (que dura tal vez 15 a 20 segundos); y la memoria a largo plazo.

Para que funcione la memoria icónica, los niños tienen que a lo menos estar prestando atención. Para mejorar la memoria a corto plazo, Miller (1956) hace hincapié en los conceptos de agrupación y *capacidad de la memoria a corto plazo*. La memoria a corto plazo puede trabajar con unas 7 (±2) unidades de significado. Estas unidades pueden ser palabras, mnemotécnicas, dígitos u otros similares. La memoria se puede mejorar si se les da sentido a las unidades. Por ejemplo, muchas personas encuentran que es más mucho más fácil recordar las cuatro letras MATE (una unidad de memoria) que M K R S (4 unidades de memoria), a menos que, por supuesto, estas personas reconozcan las letras M K R S como las primeras letras de las primera cuatro palabras del himno nacional de Singapur, en cuyo caso se convierten en una unidad con significado.

Por lo general, la memoria a largo plazo se puede mejorar dándole sentido al contenido y relacionándolo con información conocida. Una vez más desde la metáfora del computador, en vez de guardar toda la información aprendida en una carpeta gigante, es mejor crear una serie de archivos bien organizados dentro de un conjunto de carpetas organizadas, porque esto debería facilitar la recuperación de información. Este es el propósito de la tercera parte del tipo de actividad de comprensión de nuestro modelo original de enseñanza, donde las relaciones numéricas se relacionan y se almacenan. Por ejemplo, 2 + 4, 4 + 2, 6 - 2, y 6 - 4 son una familia de relaciones y se almacenan como una unidad de memoria.

'¡El punto metaclave!'

Nuevamente, los profesores siempre están tomando decisiones. En esta sección, nuestros puntos claves se han analizado de forma separada, como si fueran mutuamente excluyentes. Sin embargo, la realidad no podría estar más alejada. Al momento de planificar las clases, los profesores tienen que integrar lo que piensan, es decir, lo que creen sobre el grado de preparación de los niños en términos de desarrollo para ciertos conceptos, los tipos de actividades y los tipos de materiales que mejor ejemplifican estos conceptos, y las formas de apoyar el registro en la memoria de largo plazo. Durante las clases, siguen los procesos de toma de decisión: ¿será necesario otro ejemplo?, ¿qué puedo hacer si el niño ha entendido de manera incorrecta? Y ¿funcionan mis ejercicios y mis prácticas?

Reflexiones sobre el modelo de enseñanza

Comparaciones con el marco currícular de matemática

En Singapur, todos los profesores deben estar familiarizados con el marco en forma de pentágono que se utiliza para conceptualizar la enseñanza de la matemática durante la educación básica (DPDC, 2006). Este modelo, que se muestra en parte en la Ilustración 3-17, tiene como eje la resolución de problemas. Les enseñamos matemática a los niños para que sean capaces de resolver problemas. Con el fin de facilitar el camino hacia este objetivo primario, el modelo incluye cinco componentes: habilidades, procesos, conceptos, actitudes y metacognición. ¿Cómo se compara este marco con el modelo de enseñanza?

Ilustración 3-17 Marco curricular de la matemática en Singapur

Tres de estos componentes, los conceptos, los procesos y las habilidades, se originan en la parte de la comprensión del modelo de enseñanza. Sin embargo, es evidente que los procesos en relación a la resolución de problemas también son esenciales en la parte de transferencia del ciclo de enseñanza.

Aunque se puede debatir, la metacognición es una parte inherente de todos los componentes. Se debe alentar a los niños a que se pregunten: '¿Entiendo estas ideas lo suficientemente bien como para empezar a memorizarlas?, '¿Puedo trabajar lo suficientemente rápido y sin caer en errores ahora que están próximos a empezar a aplicar reglas o conceptos?' o '¿Estoy bien preparado para empezar a aprender un nuevo tópico?' Con el componente de actitud del marco, se podría esperar que, si los niños comprenden la tarea que están realizando, demuestran cierta facilidad con los procedimientos y las habilidades que se utilizan en ella, y pueden usar su conocimiento, debieran sentir una disposición positiva con respecto a la matemática.

El Ministerio de Educación de Singapur a veces propone otras iniciativas que, de una u otra forma, apoyan o extienden el marco curricular de la matemática. El enfoque SEED, recientemente recomendado, se puede concebir como una síntesis de las distintas teorías de aprendizaje que se analizan en este capítulo (DPDC, 2004).

- Para desarrollar los conceptos y las habilidades matemática, el enfoque SEED alienta a los alumnos a que participen en buena medida en las formas 'enactivas' de los conceptos. Posteriormente, se presentan las formas pictóricas y simbólicas.
- Para ayudar a los niños a crear esquemas complejos de conceptos, tanto la variación como la integración son importantes. La integración puede darse dentro de materias o entre ellas.

- Por su parte, la interacción es otro aspecto importante del enfoque. Se espera que los niños trabajen con sus compañeros cada cierto tiempo. La disposición física de las aulas, lo que incluye el uso de los centro de aprendizaje, facilita la interacción entre pares.

Complejidad del modelo de enseñanza

En este punto, un lector podría suponer que la aplicación del modelo implica que se tiene que empezar enseñando la parte de comprensión para luego seguir de forma ordenada y lineal por los distintos tipos de actividades. Por supuesto, la realidad de la enseñanza es mucho más compleja. Lo más probable es que los profesores comiencen con el tema por medio de una 'transferencia' a partir de algunas habilidades ya conocidas, y luego trabajarían los distintos aspectos de la comprensión para, finalmente, empezar las actividades de consolidación. Luego, se podría volver a algunas de las tareas de comprensión avanzadas, antes de regresar una vez más a las actividades de consolidación. Por lo tanto, en el aula, es muy probable que los profesores pasen de una etapa a otra y de una parte a otra del modelo.

Integración de las ideas claves en el modelo de enseñanza

Aunque algunos puntos clave que se tratan en este capítulo se han aislado en aras de facilitar el diálogo, es evidente que están interconectados. Cuando planificamos una clase, tenemos que considerar los niveles cognitivos de nuestros niños y decidir si se encuentran en sus zonas de desarrollo próximo. Tenemos que reconocer la naturaleza espiral de nuestro currículo. Tenemos que elegir entre todos los materiales aquellos que mejor ejemplifiquen lo aprendido, y los tenemos que utilizar de forma eficaz. Debemos comprender el rol del C-P-A (concreto-pictórico-abstracto), y que se puede aplicar de igual forma para ayudar a los niños a desarrollar su comprensión conceptual como a apoyarlos a la hora de resolver problemas difíciles. Como tal, las ideas clave se convierten en principios pedagógicos que nos ayudan a planificar actividades de aprendizaje eficaces para los alumnos.

Comentarios finales

Cuando Ashlock et al. (1983) postularon su ciclo de tipo de actividades original, su objetivo era que los profesores comprendieran que necesitaban una conexión entre los objetivos de contenidos que deben enseñar y los tipos de actividades que necesitan planificar para promover el aprendizaje eficaz. En la actualidad, es igualmente importante que, cuando los profesores planifiquen sus clases, se aseguren de que existan conexiones directas y útiles entre el contenido y las actividades de enseñanza. Tal como hemos adoptado el modelo C-C-A (conocimiento, comprensión y aplicación) para utilizarlo junto con evaluaciones, debemos incorporar algún modelo de enseñanza y de aprendizaje orientado a actividades en nuestra planificación de clases, lo que nos servirá como guía para la planificación de nuestras unidades y clases. Las decisiones de enseñanza informadas requieren algún tipo de marco. Para que los profesores puedan leer y meditar al respecto, las partes claves del modelo de enseñanza se resumen en la Tabla 3-2.

Tabla 3-2 Modelo de enseñanza

Componentes del modelo de enseñanza	
Comprensión **Objetivos:** • Presentar a los estudiantes nuevas ideas utilizando quizás ideas conocidas de conocimiento previo (iniciar) • Trabajar idea claves dentro del nuevo concepto (abstraer) • Interpretar las idea claves dentro del concepto (esquematizar)	**Notas:** • Incluye utilizar modelos concretos y modelos concretos-pictóricos-simbólicos. • Implica enseñar nuevas palabras, convenciones para la escritura, etc.
Consolidación **Objetivo:** • Ayudar a los alumnos a lograr rapidez y precisión razonables al momento de utilizar los nuevos conceptos y habilidades	**Notas:** • Incorpora tanto las actividades de ejercicios rutinarias y no rutinarias, al igual que juegos sencillos • Incluye nociones de palabras de aliento.
Transferencia **Objetivo:** • Facilitar el uso de conceptos en nuevas situaciones	**Notas:** • Incorpora el modelo de resolución de problemas de Polya. • Hace hincapié en las extensiones interesantes hacia otras áreas de la matemática, o incluso otras áreas del currículo • Incluye aplicaciones a la vida real
Evaluación **Objetivo:** • Inferir si los niños han dominado o no los aspectos básicos del nuevo concepto	**Notas:** • La evaluación debe ser multidimensional (por ejemplo, incluye tanto estrategias formales como informales) Puede incluir pruebas a lápiz y papel, y técnicas de entrevista y observacionales Las decisiones pueden indicar si los estudiantes han dominado, dominado en parte, o dominado limitadamente los conceptos.

*Fuente: adaptado de Ashlock et al. (1983)

Referencias

Ashlock, R. B., Johnson, M. L. Jones, W. L. & Wilson, J. W. (1983). *Guiding each child's learning of mathematics*. Columbus, OH: Charles E. Merrill Publishing Company.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H. & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives, Handbook I: Cognitive domain*. Nueva York: McKay.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (1996). *PSLE information booklet*. Singapur: Ministerio de Educación.

CPDD. (2004). *Project SEED: Frequently asked questions.* Singapur: Ministerio de Educación.

DPDC. (2006). *Mathematics syllabus-primary 2007.* Singapur: Ministerio de Educación.

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. Londres: Hutchison Educational Limited.

Miller, G. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63, 81-97.

Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Capítulo 4
Resolución de problemas en matemática

Foong Pui Yee

Introducción

> *La resolución de problemas debería ser el foco central del currículo de matemática. Como tal, es una de las metas principales de la enseñanza de la matemática y forma parte integral de todas las actividades de esta área. La resolución de problemas, más que un tema en particular, es un proceso que debería formar parte de los diferentes temas que se enseñan en el programa escolar, además de proveer el contexto adecuado para aprender conceptos y habilidades.*
>
> (NCTM, 1989, p. 23)

Esta aseveración del Consejo Nacional de Profesores de matemática de los Estados Unidos refleja el énfasis que hay que dar a la resolución de problemas en los programas escolares de matemática en todo el mundo. Singapur no es la excepción. El currículo de matemática en Singapur se adhiere a las perspectivas sobre educación basada en reformas que existen a lo largo del mundo. Su objetivo principal es suplir las demandas de un nuevo siglo para que todos los estudiantes entiendan los conceptos, dominen las habilidades de razonamiento y adopten una actitud positiva cuando se den cuenta que la matemática es necesaria para aplicaciones complejas y comunes en situaciones problemáticas. En el marco del currículo de Singapur (DPDC, 2000) la resolución de problemas matemáticos se encuentra en el centro, la cual, según se describe en el marco curricular, implica utilizar y aplicar la matemática en tareas prácticas, en problemas de la vida real y dentro del mundo mismo de la matemática. En el marco se sostiene que los problemas deberían cubrir una amplia variedad de situaciones, desde desafíos matemáticos rutinarios a aquellos no rutinarios en contextos no comunes, además de investigaciones abiertas que requieren de procesos de razonamiento y heurística.

La capacidad de resolver problemas es parte integral de la matemática.
(Informe Cockcroft, 1982)

La capacidad de aplicar la matemática a una variedad de situaciones podría considerarse como una forma de resolución de problemas. Sin importar lo que otros pretendan decir cuando definen el término 'resolución de problemas' en matemática, lo más importante sigue siendo la manera de actuar cuando uno se enfrenta a un problema que requiere el uso de procesos, conceptos y habilidades matemática. Las experiencias en la resolución de problemas deberían consistir en resolver diferentes problemas con la misma estrategia o aplicar diferentes estrategias al mismo problema. La resolución de problemas no debería consistir en realizar ejercicios repetitivos en los cuales se resuelve el mismo tipo de problema con una única estrategia. Cada día aparecen diferentes tipos de preguntas no rutinarias en las evaluaciones de matemática de educación básica, las que buscan reflejar la importancia que se le da a las capacidades que tienen los alumnos para utilizar distintos enfoques de resolución de problemas al momento de responder. Para que los alumnos sean capaces de resolver problemas correctamente, los profesores deben inspirar confianza al momento de enfrentarse a los distintos tipos de problemas matemáticos y deben ser capaces de enseñar las diferentes habilidades o enfoques necesarios para resolver los diferentes problemas. En algunos estudios, se sugiere que ciertas habilidades de resolución de problemas, que ayudan a mejorar el desempeño a la hora de resolver problemas matemáticos, pueden aprenderse si el profesor demuestra cómo funciona la estrategia. Asimismo, se sugiere que es primordial que los profesores conozcan los diferentes tipos de problemas, sepan reflexionar acerca de los métodos de respuesta y puedan clasificar las diferentes técnicas o estrategias de solución. Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es equipar a los profesores en el uso de diferentes estrategias heurísticas para la resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos que se recomiendan para el plan de estudios local.

Tareas de resolución de problemas

Por lo general, las clases de matemática se planifican y describen en términos de las tareas que los alumnos deben realizar. Estas tareas en el plan de estudio de la educación básica, que por lo general se denominan problemas matemáticos, van desde ejercicios de repetición y práctica de cálculo y problemas de enunciado de un paso, hasta tareas desafiantes que se conocen como problemas de pasos múltiples o sumas difíciles. Sin embargo, en la resolución de problemas, se acepta la idea de que no todos los problemas matemáticos en los textos escolares corresponden a situaciones reales. Los problemas de enunciado que se encuentran en los textos escolares y libros de ejercicios, también conocidos como problemas de traducción de un paso a problemas de resolución de pasos múltiples, tienen algoritmos sencillos que los alumnos pueden aplicar directamente. El propósito principal de estos problemas matemáticos no es tanto desarrollar la capacidad de resolver problemas, sino más bien brindar oportunidades para practicar y reforzar lo aprendido al final de la clase en la que se estudiaron conceptos y habilidades de varios temas del plan de estudios.

Por lo tanto, muchos educadores de matemática hace una distinción entre la resolución de problemas reales y problemas de suma rutinarias, que corresponden a ejercicios de procedimiento o de memorización a nivel básico que requieren métodos sencillos para ser solucionados. Las tareas de resolución de problemas reales deberían exigir procesos cognitivos de mayor nivel, con características que pueden requerir:

- razonamiento complejo y no algorítmico.
- análisis de dificultades de la tarea y el uso de estrategias heurísticas.
- exploración de conceptos, procesos o relaciones matemática.
- comprensión del contexto del problema e interés y motivación para tratar de encontrar una solución.

Este último requisito puede decirse que es el momento determinante cuando un problema se convierte en una tarea de resolución de problemas para una persona. La persona debe estar consciente de que existe una situación que necesita una respuesta, la cual no se puede resolver con un método directo. Además, ella o él deben estar dispuestos a resolver el problema con la ayuda de una gama de estrategias.

Esquema de clasificación de problemas matemáticos

Para que la resolución de problemas logre su función en el currículo, los profesores deberían ser capaces de distinguir entre varias categorías de problemas y sus funciones. Al estar equipados con los conocimientos necesarios, pueden seleccionar o incluso construir tareas de manera sensata para sus alumnos, las que servirán para promover diferentes actividades de resolución de problemas en una clase de matemática. Basado en una búsqueda sistemática realizada por Foong (1990) de los artículos y estudios publicados respecto a la resolución de problemas y el uso de problemas en investigaciones, en este capítulo se propone un esquema de clasificación para los diferentes tipos de tareas matemática, como se muestra en la Ilustración 4-1.

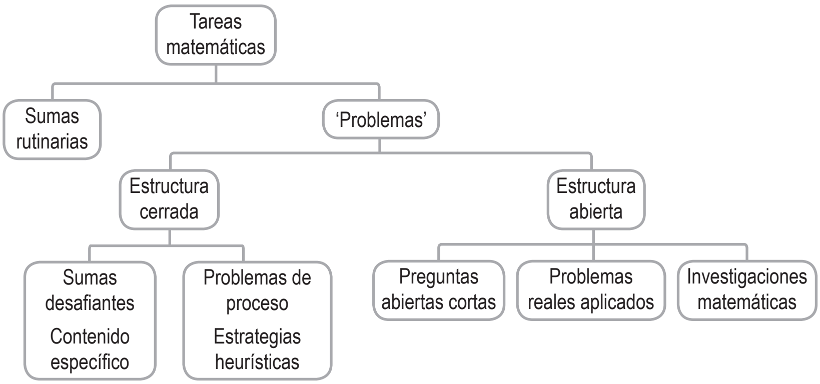


Ilustración 4-1 Plan de clasificación para los tipos de 'problemas' matemáticos

Todas las tareas matemática pueden clasificarse de manera general en dos grupos: problemas y sumas rutinarias en textos escolares. Adoptaremos la definición comúnmente aceptada de problema, como uno donde el razonamiento ocurre cuando una persona se enfrenta a la tarea de resolver un problema que no tiene respuesta inmediata y acepta el desafío de encontrarle una solución. En esta definición no se incluyen aquellos ejercicios de los textos escolares que se utilizan para practicar algún algoritmo o habilidad, como las sumas con cálculos o problemas enunciados que se solucionan en uno o más pasos. En este plan, los problemas se pueden seguir subdividiendo en problemas de estructura cerrada o abierta y cumplen diferentes funciones en la enseñanza de la matemática, como la enseñanza de resolución de problemas, la enseñanza sobre la resolución de problemas y el aprendizaje por medio de la resolución de problemas. Estas funciones se explicarán a continuación de acuerdo con las diferentes categorías de problemas.

Problemas cerrados

Los problemas cerrados se caracterizan por ser bien estructurados, puesto que se componen de tareas claramente formuladas, en donde la respuesta correcta siempre puede determinarse de manera fija a partir de los datos necesarios que se mencionan en la situación. Estos problemas cerrados incluyen tanto problemas rutinarios de contenido específico que se solucionan en varios pasos, como problemas no rutinarios basados en las heurísticas. Para resolver los problemas, la persona debe utilizar habilidades de proceso o tomar algunos pasos críticos que forman parte del método para la solución. Esto se logra mediante un razonamiento productivo y no solo recordando datos.

Sumas desafiantes

Los profesores de educación básica en Singapur utilizan sumas desafiantes a la hora de enseñar los métodos de resolución de problemas. En estos casos, el énfasis yace sobre aprender la matemática para aplicarlas al momento de resolver problemas luego de aprender un tema en particular. Se utilizan para evaluar las habilidades de razonamiento analítico de mayor nivel. Hay una estrategia específica, conocida como el método de modelo, que se le enseña a los alumnos para resolver problemas verbales estructurados similares en diferentes temas de la aritmética, como los números naturales, las fracciones, las razones y los porcentajes.

Ejemplo 1

$\frac{3}{5}$ de los alumnos en 6°A y $\frac{3}{4}$ de los alumnos en 6°B son niñas. Ambas clases tienen el mismo número de niñas y el curso 6°A tiene 8 niños más que el curso 6°B. ¿Cuántos alumnos hay en el curso 6°A?

Ejemplo 2

En un principio, el dinero de Susana en relación con el dinero de María se encontraba en una razón de 5:3. Pero luego, Susana dio $20 a María, por lo que cada una quedó con un monto de dinero igual. ¿Cuánto dinero tenía María al principio?

Ejemplo 3

En un curso de 32 alumnos, el 25 % son hombres. Si unos cuantos hombres más entran al curso, el porcentaje de niños aumenta a un 40 %. ¿Cuánto niños entran al curso?

Problemas no rutinarios

Algunas veces, estos se conocen como problemas de proceso. Los ejemplos 1 y 2 a continuación representan los tipos de problemas no rutinarios que los profesores pueden utilizar cuando enseñan los modos de resolver problemas. El énfasis recae en utilizar estrategias heurísticas para abordar y resolver un problema no conocido, que por lo general no es específico a un dominio o tema del plan de estudios. Por lo general, tales problemas de proceso contienen muchos casos que los alumnos deben considerar y organizar. Son útiles para demostrar los procesos que se deben realizar al momento de razonar y desarrollar las diferentes heurísticas orientadas a resolver el problema, como adivinar y comprobar, buscar patrones y resolver el problema de manera inversa. Los alumnos ya deberían dominar el contenido matemático que se debe resolver en estas tareas. En algunos casos, los profesores han intentado integrar estas heurísticas para resolver problemas de contenido.

Ejemplo 4

El granjero estaba contando sus patos y ovejas. Contó 10 cabezas y 26 pies en total. ¿Cuántos patos y ovejas tiene?

- ¿Con cuántas estrategias se cuenta para resolver este problema?

1. Algebraica

   $P + O = 10$
   $2P + 4O = 26$

2. Adivinar y verificar la respuesta

   Inténtalo con 5 patos y 5 ovejas. En ese caso es 10 + 20 pies, por lo que es mucho.

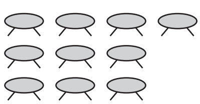
   Inténtalo con 6 patos y 4 ovejas. En ese caso es 28 pies, por lo que es mucho.

   Inténtalo con 7 patos y 3 ovejas. En ese caso es 26 pies, por lo que esa es la respuesta.

   También se pueden tabular los intentos

Patos	Ovejas	Cabezas	Total pies
5 × 2	5 × 4	10	30 ✘
6 × 2	4 × 4	10	28 ✘
7 × 2	3 × 4	10	26 ✔

3. Diagramar



4. Razonar

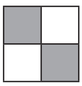
   Si todos los patos, 20 pies, 6 extras, 3 pares de ovejas. Entonces 3 ovejas, 7 patos.

Ejemplo 5

¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

- Pista: Utiliza la siguiente heurística:
  1. procede de manera sistemática
  2. busca un patrón
  3. generaliza una regla
  4. intenta con ejemplos sencillos (ver a continuación)
  5. tabula los resultados (ver a continuación)

  Inténtalo con un ejemplo más sencillo.
  ¿Cuántos cuadrados hay? ¿Puedes encontrar 5?



Tabula los resultados

Tamaño de cuadrado	Número de cuadrados
2×2	5
3×3	?
4×4	?
...	
...	
8×8	?

Problemas de final abiertos

En esta categoría, los problemas por lo general se consideran como 'problemas mal estructurados', debido a que no se encuentran formulados con claridad, pues les faltan datos o supuestos y no hay un procedimiento fijo que garantice llegar a una solución correcta. Se subdividen en tres subcategorías: problemas reales aplicados, investigaciones matemática y preguntas cortas abiertas.

Problemas reales aplicados

Resolver problemas en situaciones cotidianas requiere que la persona comience con una situación real a partir de la cual se pueda llegar a las ideas matemática subyacentes que importan.

Ejemplo 6

El Sr. Pérez quiere pintar todas las paredes y el techo de su departamento de 3 habitaciones. El techo está a 4m de altura. Necesita 1 litro de pintura para pintar 10m^2. La pintura cuesta $16,90 por cada tarro de un litro. ¿Qué más necesita el Sr. Pérez para pintar su departamento? Configura un plan y estima un presupuesto para su visita a la tienda en donde comprará los elementos que necesita para pintar el departamento.

Investigaciones matemática

Por lo general, se presentan como actividades abiertas para que los alumnos exploren y trabajen una parte de la matemática puras por el placer de hacerlo. Algunos consideran que las investigaciones matemática son una extensión de las tareas de resolución de problemas, en donde el proceso es abierto y los alumnos lo pueden desarrollar de diferentes maneras. Las investigaciones brindan la oportunidad para que los alumnos perfeccionen sus propios sistemas, a fin de generar resultados a partir de la exploración, tabular datos para encontrar patrones, proponer conjeturas y comprobarlas, y justificar y generalizar los hallazgos. Se alienta a que los alumnos piensen en estrategias alternativas; es decir, que se pregunten: '¿qué pasa si...?' y observen los cambios.

Ejemplo 7

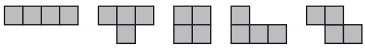
Investigaciones sobre números: resta inversa y suma inversa

Escoge cualquier número de 3 dígitos	:	123
Invierte los dígitos	:	321
Resta		321 - 123 = 198
Comienza con la respuesta	:	198
Invierte los dígitos	:	891
... y suma		198 + 981 = 1089
Inténtalo con otro número	:	609
		906 - 609 = 297
		297 + 792 = 1089

Investigue lo que ocurre cuando escoges otros números de tres dígitos. ¿Siempre da como resultado 1098?

Ejemplo 8

Investiga tetróminos



1. ¿Cuáles de estos tetróminos se pueden teselar
2. ¿Cuántas formas se pueden armar utilizando los cinco tetróminos?
3. ¿Se puede hacer un rectángulo de 4 × 5 con estos tetróminos?
4. ¿Qué más puedes descubrir con los tetróminos?

Problemas de final abiertos cortos

Los profesores pueden utilizar los problemas abiertos cortos cuando enseñan la resolución de problemas para lograr que los alumnos alcancen una comprensión más acabada de las ideas y la comunicación matemática. Las características principales de las preguntas abiertas son que tienen muchas respuestas posibles y que se pueden resolver de distintas maneras. Por lo general, no parecen ser complicadas o complejas sino más bien sencillas con una estructura que las hace accesibles a todos.

Ejemplo de suma rutinaria versus suma de final abierta

- La señora Pérez quiere poner 12 manzanas en algunos platos. Cada plato debe tener 3 manzanas. ¿Cuántos platos necesita?
- La señora Pérez quiere poner 12 manzanas y naranjas en algunos platos. Cada plato debe tener la misma cantidad de frutas. Muestra las diferentes maneras en que puede poner las manzanas y naranjas en los platos.

Exigencias de razonamiento cognitivo de gran nivel en tareas de problemas abiertos:

1. Los alumnos deben proponer sus propias suposiciones sobre los datos que faltan: el número de platos o el número de frutas en cada plato.
2. Los alumnos deben recurrir a los conocimientos relevantes que ellos crean que son pertinentes (por ejemplo, multiplicación, divición, fracciones, factores, etc.).
3. Los alumnos deben demostrar tener un sentido numérico y de los patrones de agrupación equitativa.

4. Los alumnos deben utilizar la estrategia de enumeración sistemática.
5. Los alumnos deben comunicar su razonamiento utilizando diferentes modos de representación.
6. Los alumnos deben demostrar su creatividad en tantas estrategias y soluciones como les sea posible.

Heurísticas y estrategias para la resolución de problemas

En la resolución de problemas, los términos 'estrategia' y 'heurística' se utilizan comúnmente para describir algunos enfoques o técnicas que se utilizan en el proceso de encontrar una solución. Las estrategias son técnicas útiles para resolver una gran variedad de problemas. Se pueden seguir unos pasos generales para hacer que un problema sea más claro, simple o abordable. Con frecuencia, los dos términos se consideran como sinónimos y algunas veces se utilizan juntos como estrategias heurísticas. Las heurísticas se podrían definir como un conjunto de estrategias generales mediante las cuales una persona avanza hacia la solución, como en el libro clásico de Polya (1971) "How to Solve It", en donde se describe el siguiente proceso de 4 fases.

1. *Comprender el problema*

   ¿Qué es lo que el problema requiere que uno haga? ¿Qué es lo que estamos tratando de descubrir? ¿Se puede refrasear el problema?

2. *Elaborar un plan*

   ¿Qué sabemos? ¿Qué debemos hacer para resolver el problema? ¿Necesitamos más información? ¿Hay alguna pregunta escondida? ¿Qué estrategias sirven?

3. *Ejecutar el plan*

   Se ejecuta el plan. Se aplican estrategias, conceptos y habilidades matemática.

4. *Corroborar los resultados*

   Se compara con la pregunta original. ¿Está bien? ¿Debemos revisar el plan para cumplir con todas las condiciones?

Al mismo tiempo, hay estrategias específicas como las siguientes, las que se pueden enseñar y explicar al resolver ciertos tipos de problemas de proceso no rutinarios:

- Actuar el problema
- Utilizar una diagrama o dibujar modelos
- Hacer una enumeración sistemática

- Buscar si es que hay patrones y usar un patrón
- Adivinar y verificar / ensayo y error
- Proceder de manera inversa
- Utilizar el concepto antes-después
- Solucionar un problema más sencillo o dividirlo en partes
- Anotar una aseveración matemática
- Hacer suposiciones

Los alumnos necesitan ver ejemplos de las estrategias heurísticas generales y específicas recién enumeradas. en acción cuando se resuelve un problema. Los profesores también pueden ejemplificar todo el proceso de resolución de problema de manera sistemática en un diagrama de flujo (Anexo 4-1) para modelar las maneras en que se puede abordar un problema. Este diagrama de flujo se puede pegar en la pared a modo de afiche, para que los alumnos puedan consultarlo cuando deban resolver problemas.

Aplicando estrategias a problemas

En esta sección, vamos a ilustrar algunas de las estrategias que los alumnos usan en clases. Para comenzar, demostraremos el uso del método de modelo para resolver sumas difíciles y luego continuaremos con estrategias específicas para problemas de proceso no rutinarios.

Estrategia 1: método de modelo

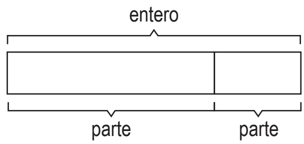
Kho (1987) destaca cuatro razones por las cuales se debería incluir el método de modelo en el plan de estudios de matemática para la educación básica de Singapur como una estrategia de resolución de problemas que se debería enseñar a los alumnos. Las razones se mencionan a continuación.

- Ayuda a que los alumnos comprendan mejor los conceptos matemáticos, como las fracciones, las razones y los porcentajes.
- Ayuda a que los alumnos planifiquen los pasos a tomar para encontrar la solución de un problema aritmético.
- Se parece al método algebraico, pero es menos abstracto.
- Puede servir de estímulo para que los alumnos resuelvan problemas difíciles.

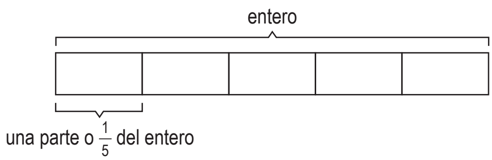
A modo general, hay tres modelos estructurales diferentes que los alumnos puede aprender a utilizar para sumas difíciles que contienen conceptos de parte-todo, comparación o de antes-después. Cuando se aplica este método, el alumno realiza un proceso de síntesis a medida construye el modelo de acuerdo con la información especificada en el problema. Posteriormente, el alumno analiza el problema para definir una secuencia de pasos lógicos que permitan llegar a la solución. A continuación se brindan algunos ejemplos de los tipos de modelos y sus aplicaciones.

Modelo parte-todo (también conocido como modelo 'parte-parte-entero')

Un entero se divide en dos o más partes. Cuando se conocen las partes, se puede encontrar el entero al sumarlas. Cuando se sabe cuál es el entero y una de sus partes, podemos encontrar la parte incógnita al restar el entero y la parte conocida.

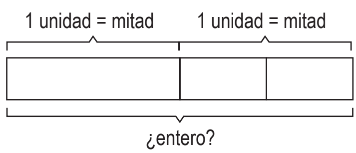


El modelo parte-todo también es apropiado para los conceptos de multiplicación o división y fracción cuando el entero se divide en partes iguales.



Ejemplo 9

Melinda compró algunos dulces. Se comió la mitad y luego dio 5 dulces a su mejor amiga. Al final se quedó con 7 dulces. ¿Cuántos dulces compró Melinda?

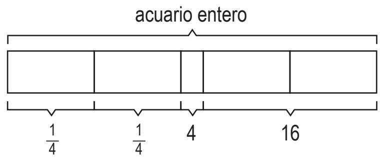


1 unidad $\rightarrow$ 5 + 7 = 12
Entero $\rightarrow$ 2 unidades
$\rightarrow$ 12 x 2 = 24

Melinda compró 24 dulces.

Ejemplo 10

$\frac{1}{4}$ de los peces en un gran acuario son peces dorados. Hay 4 ejemplares más de lebites que de peces dorados en el acuario. Los otros 16 peces son carpas. ¿Cuántos peces hay en el acuario?



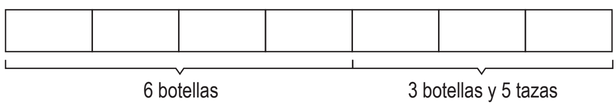
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

La mitad del todo → 4 + 16 = 20
Acuario entero → 20 x 2 = 40

Hay 40 peces en el acuario.

Ejemplo 11

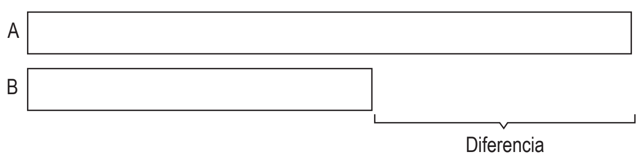
6 botellas de agua pueden llenar $\frac{4}{7}$ de un contenedor. Para llenar el contenedor, se necesitan 3 botellas más y 5 tazas de agua. ¿Cuántas tazas de agua caben en el contenedor?



4 unidades → 6 botellas; 3 unidades → 3 botellas + 5 tazas
2 unidades → 3 botellas; 3 unidades → 2 unidades + 5 tazas
Entonces 1 unidad → 5 tazas
Contenedor entero: 7 unidades → 7 x 5 = 35 tazas
En el contenedor caben 35 tazas de agua.

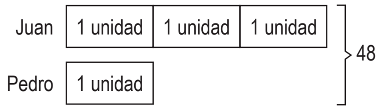
Modelo de comparación

Este modelo muestra la relación entre dos o más cantidades cuando se comparan. Cuando A y B se conocen, podemos encontrar la diferencia entre ellas o su razón. Por el contrario, podemos encontrar A o B cuando se conoce una de ellos y la diferencia o razón.



Ejemplo 12

Juan vendió tres veces más computadores que Pedro. Los dos juntos vendieron 48 computadores. ¿Cuántos computadores vendió Pedro?

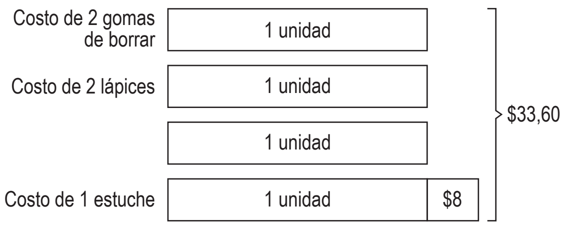


4 unidades → 48
1 unidad 48 ÷ 4 = 12

Pedro vendió 12 computadores.

Ejemplo 13

Dos gomas de borrar, dos lápices y un estuche cuestan en total $33,60. Un lápiz cuesta el doble de una goma de borrar. Un estuche cuesta $8 más que un lápiz. Encuentra cuánto cuesta un estuche.



4 unidades + $8 → $33,60
4 unidades → $33,60 - $8 = $25,60
1 unidad → $25,60 ÷ 4 = $6,40

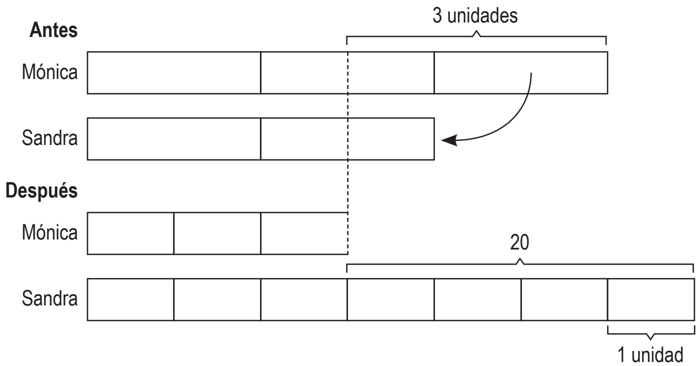
Un estuche cuesta → 1 unidad + $8
$6,40 + $8
= $14,40

Modelo antes-después

Este modelo demuestra la relación que existe entre el nuevo valor de una cantidad y el valor original después de un aumento o reducción. Por lo general, también incluye el uso de un modelo de comparación para estructuras antes-después complejas, como aquellas que aparecen en las sumas difíciles.

Ejemplo 14

Mónica y Sandra compartieron una caja de bombones en una razón de 3:2. Después de que Mónica dio a Sandra $\frac{1}{2}$ de su parte, Sandra tenía 20 bombones más que Mónica. ¿Cuántos bombones dio Mónica a Sandra?

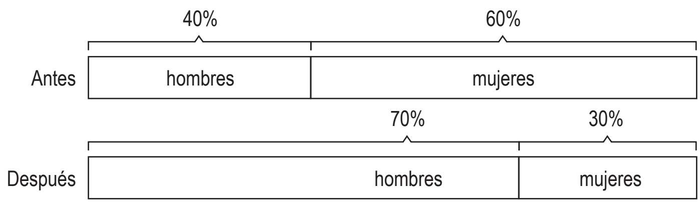


4 unidades $\rightarrow$ 20
1 unidad $\rightarrow$ $20 \div 4 = 5$
3 unidades $\rightarrow$ $3 \times 5 = 15$

Mónica dio 15 bombones a Sandra.

Ejemplo 15

En una fábrica trabajan 1200 personas. El 40 % son hombres. Se contrataron a más trabajadores hombres, por lo que el número total de hombres alcanzó el 70 % de todo los empleados en la fábrica. ¿Cuántos trabajadores hombres nuevos fueron contratados?



Antes: 40 % de empleados = $\frac{4}{100} \times 1200 = 480$ hombres.

60 % de empleados = $\frac{60}{100} \times 1200 = 720$ mujeres.

Después: 30 % de empleados = 720 mujeres.
10 % empleados = $720 \div 3 = 240$.
70 % empleados = $240 \times 7 = 1680$ hombres.
Número de empleados hombres nuevos = $1680 - 480 = 1200$

Se contrataron a 1200 nuevos empleados hombres.

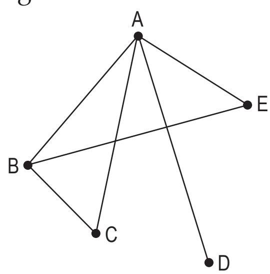
Estrategia 2: dibujar un diagrama o esquema

Como se muestra en el método de modelo recién descrito, dibujar o utilizar objetos para esquematizar o 'modelar' los eventos o relaciones en un problema es una estrategia eficaz para ayudar a los alumnos a aclarar cuáles son los elementos y qué se debe hacer para encontrar una solución. Es una ayuda para que los alumnos visualicen la situación del problema y comprendan cuáles son las relaciones espaciales en el problema. Esta estrategia es muy útil para alumnos que aprenden mejor con ayudas visuales.

Ejemplo 16

5 alumnos, A, B, C, D y E, participaron en una competencia de ajedrez. Cada uno debe jugar 1 partida con todos los otros jugadores. Hasta el momento, A ha jugado 4 partidas, B ha jugado 3 partidas, C ha jugado 2 partidas y D ha jugado 1 partida. ¿Cuántas partidas ha jugado E?

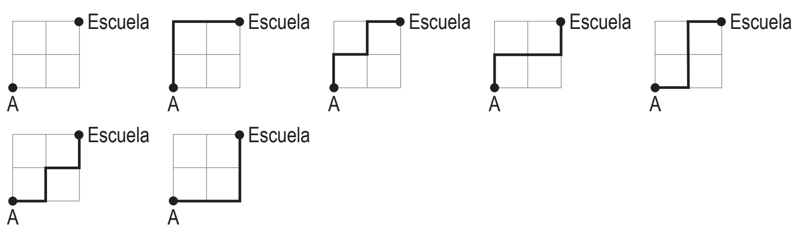
Estrategia: dibujar un diagrama



Respuesta: E ha jugado dos partidas.

Ejemplo 17

Horacio vive en el punto A. ¿Cuántas rutas puede tomar para llegar a la escuela? ¿Puedes encontrarlas todas?



Respuesta: 6 rutas diferentes.

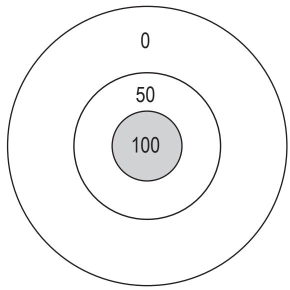
Estrategia 3: hacer una lista sistemática

Hacer una lista organizada como una tabla o cuadrícula es una estrategia muy útil cuando un problema genera varios datos o su solución implica una gran serie de respuestas posibles. Por medio de una lista organizada, los alumnos pueden clasificar la información de acuerdo con ciertas características y así comprobar las diferentes posibilidades de manera sistemática. Los alumnos pueden utilizar listas completas para revisar las diferentes posibilidades, revisar en caso de que haya patrones o respuestas repetidas y llegar a soluciones.

Ejemplo 18

Juan está organizando una competición de tiro con arco. Cada persona debe tirar 3 flechas. Si las tres flechas caen en el objetivo, ¿cuántos puntajes diferentes se pueden obtener?

100	50	10	Total
→ → →			300
→ →	→		250
→ →		→	210
→	→ →		200
→	→	→	160
→		→ →	120
	→ → →		150
	→ →	→	110
	→	→ →	70
		→ → →	30



Respuesta: se pueden obtener 10 puntajes diferentes.

Ejemplo 19

El granjero Torres quiere cercar su huerta de vegetales. El área que cubre la huerta es de 60 m2. Si el largo de la cerca en cada lado se mide solo en números enteros y en metros, ¿cuáles son los diferentes perímetros de cercado que puede utilizar?

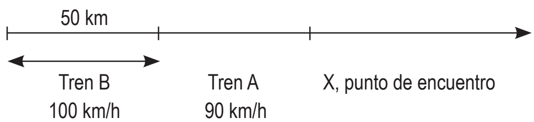
Ancho	Largo	Área	Perímetro
1 m	60 m	60 m^2	122 m
2 m	30 m	60 m^2	64 m
3 m	20 m	60 m^2	46 m
4 m	15 m	60 m^2	38 m
5 m	12 m	60 m^2	34 m
6 m	10 m	60 m^2	32 m

Respuesta: Los diferentes perímetros son 122 m, 64 m, 46 m, 38 m, 34 m y 32 m.

Ejemplo 20

Dos trenes avanzan hacia la misma dirección en rieles paralelos. El tren A lleva la delantera por 50 km respecto al tren B. El tren A se desplaza a 90 km/h y el tren B a 100 km/h. ¿En cuántas horas estarán los trenes en el mismo lugar?

Estrategia: dibujar un diagrama



Método 1

En 1 hora, el tren B avanza 10 km más que el tren A. Cuando se juntan, el tren B debería haber alcanzado la diferencia de 50 km que lo separa del tren A.

Tiempo = (50 + 10) = 5 horas

Método 2

Haz una lista sistemática:

Distancia en	Tren A	Tren B
1 h	50 + 90 = 140	100
2 h	140 + 90 = 230	200
3 h	230 + 90 = 320	300
4 h	320 + 90 = 410	400
5 h	410 + 90 = 500	500

Respuesta: 5 horas.

Estrategia 4: encontrar patrones

Una de las estrategias que regularmente se utilizan para resolver problemas matemáticos es encontrar y extender patrones. En un principio, los alumnos pueden practicar reconociendo patrones numéricos y explicándolos. Los patrones también se pueden utilizar para simplificar un proceso de resolución de problemas y, a veces, los patrones son una parte crucial de la respuesta. Con frecuencia, se elabora una lista sistemática junto con esta estrategia para que los alumnos puedan buscar patrones en los datos entregados.

Ejemplo 21

Anota los números que faltan.

$1 \times 9 + 2 =$ ________________

$12 \times 9 + 3 =$ ________________

$123 \times 9 + 4 =$ ________________

_____ × _____ + _____ = 11 111

_____ × _____ + _____ = _____

_____ × _____ + _____ = 111 111 111

Ejemplo 22

Encuentra la regla que te ayudará a encontrar el segundo número si es que ya conoces el primero. Completa el cuadro.

El primer número	El segundo número
1	5
2	9
3	13
5	_____
_____	41

Ejemplo 23

Durante la reunión de apoderados, todos en la sala decidieron que se saludarían con un estrechón de manos. ¿Cuántas personas había en la sala si ocurrió un total de 45 estrechones de mano?

Estrategia: Examinar casos más sencillos

- 2 personas: 1 estrechón de manos
- 3 personas: 3 estrechones de manos
- 4 personas: 6 estrechones de manos

Estrategia: Tabula los resultados y encuentra un patrón

Nº de personas	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Estrechones de mano	1	3	6	10	15	21				

Observa el patrón: 1, 3, 6, 10, 15, 21
Cada vez aumenta uno más que el anterior.
¿Vez otro patrón?
Respuesta: había 10 personas en la sala.

Estrategia 5: adivinar y verificar

A veces denominada ensayo y error, esta estrategia es por lo general utilizada por los estudiantes de forma arbitraria, lo que pocas veces da buenos resultados. Para utilizar esta estrategia de manera correcta, los alumnos deben proponer soluciones sistemáticamente, llevar un registro o tabular sus intentos, revisar sus propuestas a la luz de la información que se entrega en el problema y luego refinar sus propuestas de soluciones en caso de que estén incorrectas. Cuando los alumnos analizan sus propuestas erróneas, obtienen información útil acerca del problema y les ayuda a decidir cómo mejorar sus propuestas de solución.

Ejemplo 24

Estoy pensando en un número positivo. Cuando lo multiplico por sí mismo y le sumo 5 veces el mismo número, obtengo como resultado 300. ¿Cuál es el número?

Adivina cuál es el número	5	10	20	15
El número × el mismo número	25	100	400	225
5 × el número	25	50	100	75
Total	50	150	500	300
Verifica	Muy poco	Muy poco	Mucho	Justo

Respuesta: mi número es 15.

Ejemplo 25

Carlos compró 24 estampillas. Algunas cuestan $15 centavos; otras cuestan $20 centavos. ¿Cuántas de cada tipo compró si pagó $4,00 por todas?

$15 × el número	$0,15 x 10 = $1,50	$0,15 x 12 = $1,80	$0,15 x 14 = $2,10	$0,15 x 16 = $2,40
$20 × el número	$0,20 x 14 = $2,80	$0,20 x 12 = $2,40	$0,20 x 10 = $2,00	$0,20 x 8 = $1,60
Total	$4,30	$4,20	$4,10	$4,00
Verifica	Mucho	Muy poco	Muy poco	Justo

Respuesta: Compró 16 estampillas de quince centavos y 8 estampillas de veinte centavos.

Estrategia 6: simplificar el problema

También conocida como resolver un problema más sencillo o revisar casos más sencillos, esta estrategia con frecuencia se relaciona tanto con la estrategia de adivinar y verificar como con la estrategia de buscar un patrón. Resolver un problema relacionado que sea más sencillo que el original hace más fácil llegar a la solución, pues se trata de condiciones más simples. Luego, este mismo enfoque se puede aplicar al problema original. A veces, un patrón se ve cuando se trabaja con casos más sencillos, los que pueden llevar a una solución del problema original.

Ejemplo 26

¿Cuál es la suma de los primeros 100 números impares?

Estrategia: Examinar casos más sencillos

Primer número impar: 1 1.......................................1 × 1

Primeros 2 números impares: 1, 3 1 + 3 = 4..........................2 × 2

Primeros 3 números impares: 1, 3, 5 1+ 3 + 5 = 9.....................3 × 3

Primeros 4 números impares: 1, 3, 5, 7 1 + 3 + 5 + 7 = 16............4 × 4

Primeros 5 números impares: 1, 3, 5, 7, 9 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.......5 × 5

Estrategia: buscar si es que hay patrones

La suma de la cantidad de números impares es igual al número al cuadrado. Respuesta: la suma de los primeros 100 números impares

= 100 × 100

= 10 000

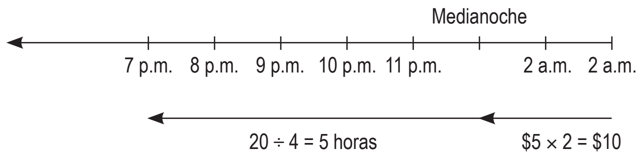
Estrategia 7: Resolver el problema hacia atrás

En los problemas en que se da información sobre cómo termina una situación pero no sobre cómo comienza, es necesario proceder de manera inversa para llegar a la solución. Los alumnos tienen que enfocarse en los eventos que ocurren en el problema y en el orden en el que ocurren, y luego aplicar las operaciones inversas para encontrar la respuesta.

Ejemplo 27

Juana trabaja en un local de comida rápida. Le pagan $4,00 por hora hasta la media noche y $5,00 por hora después de la media noche. El viernes, Juana recibió $30,00 por trabajar hasta las 2 de la mañana. ¿A qué hora comenzó a trabajar?

- Cuenta hacia atrás de hora en hora desde las 2 a.m. y calcula el monto de dinero por cada hora.

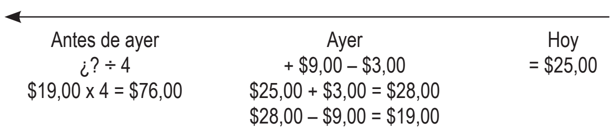


Respuesta: Juana comenzó a trabajar a las 7 p.m.

Ejemplo 28

Hoy Alejandro tiene $25. Ayer recibió $9,00 de su tía y dio a su hermana menor $3,00. El día anterior, repartió todo su dinero en partes iguales entre sus tres hermanos y él. ¿Cuánto dinero tenía Alejandro al principio?

- Recorre desde el último evento hasta el primero y utiliza operaciones inversas para encontrar la respuesta.



Respuesta: Alejandro tenía $76,00 al principio.

Hasta ahora hemos examinado siete estrategias. Estas siete estrategias heurísticas, que se explicaron con los ejemplos ya mencionados, no son exhaustivas ni mutuamente excluyentes.

Los ejemplos de los problemas escogidos para cada estrategia se utilizan principalmente para ilustrar el uso de ese enfoque en particular según los distintos de tipo de problema. No se pretende decir que existe solo una estrategia específica para resolver un problema. Muchos de los problemas no rutinarios no son necesariamente específicos a un tema matemático en particular en el plan de estudios, y no hay una manera única de resolverlos. El mismo problema se puede solucionar con diferentes estrategias y, por lo general, se utiliza más de una estrategia heurística para resolver el problema. La mayoría de las estrategias que se han descrito hasta ahora, tales como el procedimiento sistemático, la simplificación de problemas y el bosquejo de diagramas, son procedimientos sencillos y de sentido común que sirven para desarrollar hábitos de resolución de problema que pueden marcar la diferencia en el desempeño que tienen los alumnos en matemática.

Realizar una clase de resolución de problemas

El método para enseñar la resolución de problemas en clases debería ser diferente al que se utiliza en una clase de matemática tradicional, en donde la meta es la adquisición de habilidades o conceptos matemáticos por medio de un estilo expositivo con toda la clase. Las clases de resolución de problemas a veces se consideran como no estructuradas y difíciles de evaluar, más allá de si los alumnos son capaces o no de resolver un problema. En un estudio realizado por Lester (1983), se dejó en evidencia que es necesario contar con un programa sistemático con materiales curriculares planificados para mejorar el uso que los alumnos hacen de las heurísticas. Se descubrió además que las clases exitosas de resolución de problemas por lo general están compuestas de 3 fases:

1. En la fase de presentación, el profesor presenta el problema y responde a preguntas para ayudar a que los alumnos entiendan el problema.
2. En la fase de esfuerzo por encontrar una solución, los alumnos exploran el uso apropiado de estrategias y el profesor los alienta a trabajar en equipo, les hace preguntas para guiarlos por el camino correcto y les da pistas solo como último recurso.
3. Finalmente, en la fase de debate de la solución, algunos alumnos explican sus soluciones, el profesor alienta a que los alumnos verifiquen sus respuestas y procesos y guía el debate para llegar a posibles generalizaciones.

En el estudio de Lester, muchos profesores encontraron que la última fase era la más difícil de realizar. No obstante, la capacidad de los niños de entender el problema mejoró, al igual que el uso que hacían de las estrategias de resolución de problemas al momento de planificar el modo de abordar el problema. Los alumnos aprendieron a pensar durante el proceso. Los alumnos trabajaron en problemas de proceso no rutinarios, en problemas verbales sencillos y complejos y aprendieron habilidades de resolución de problemas. Asimismo, mejoró la actitud de los profesores frente a la importancia de la resolución de problemas y la capacidad de cada uno de enseñarla.

Actividades de enseñanza y un plan para las clases de resolución de problemas

Se cuenta con muchas guías de clases dirigidas a los profesores con sugerencias útiles para enseñar la resolución de problemas en la educación básica. En estas, se sugiere que la resolución de problemas resulta mejor en trabajos con grupos pequeños, pero al comenzar la clase conviene utilizar a toda la clase o, algunas veces, la exploración individual. Esta variedad de enfoques en el curso del desarrollo de la clase permite que las explicaciones que da el profesor lleguen a todos. En la Tabla 4-1 se muestra un ejemplo de una guía de enseñanza (Charles y Lester, 1984) que incluye 10 actividades de enseñanza agrupadas en tres periodos de tiempo diferentes que conforman una clase de resolución de problemas: ANTES, DURANTE y DESPUÉS.

El primer periodo, el ANTES, se refiere al momento en que todos los alumnos en la clase como un grupo único discuten sobre el problema que deben resolver. Esto sería la fase de presentación del problema. El periodo DURANTE corresponde a la fase en la cual se busca una solución y se refiere al momento en que los alumnos trabajan en grupos o de manera individual por encontrar un solución. El periodo DESPUÉS es la fase de debate cuando los alumnos se vuelven a conformar un grupo único para conversar acerca de las soluciones que se dieron al problema. Cuando ya comienza a terminar el periodo en que los alumnos trabajan para solucionar un problema, al menos dos alumnos deberían presentar su solución en la pizarra y explicar las diferentes estrategias que utilizaron para encontrar una solución. Se recomienda utilizar estas actividades de enseñanza en todos los problemas de proceso no rutinarios y problemas de interpretación complejos. Entre 20 y 25 minutos debería ser suficiente para realizar las diez actividades de enseñanza orientadas a resolver un problema. En el Anexo 4-2 se muestra un formato de plan de clases que incorpora las diez actividades. Cuando el profesor elabora el plan, no debe olvidar anotar todo los comentarios, pistas, extensiones y soluciones del problema.

Tabla 4-1 Actividades de enseñanza para una clase de resolución de problemas.

Actividad	Tiempo	Propósito
ANTES (conversación con todo el curso)		
1	Lea el problema con los alumnos o pida a uno de ellos que lo lea. Discuta acerca de las palabras y frases que los alumnos no puedan entender.	Para demostrar la importancia de la lectura cuidadosa de los problemas y centrar la atención en palabras que se interpretan de manera diferente en la matemática.
2	Converse con todos los alumnos en la clase para entender el problema con la ayuda de un diagrama de flujo para la resolución de problemas (Anexo 4-1). '¿Pueden contar el problema en sus propias palabras? '¿Pueden decir qué es lo que se debe encontrar?' 'Encuentren los datos importantes'.	Para centrar la atención en los datos importantes del problema y aclarar partes del problema.
3	(Opcional) Discuta con todos los alumnos en la clase las posibles estrategias de solución. '¿Qué estrategias pueden probar para resolver el problema? '¿Pueden dibujar un esquema para este problema?'	Para obtener ideas de los alumnos de posibles maneras de resolver el problema.
DURANTE (en grupos pequeños o de manera individual)		
4	Observe y pregunte a los alumnos para determinar en qué etapa van del proceso de resolución de problemas.	Para diagnosticar las fortalezas y debilidades de los alumnos relacionadas con la resolución de problemas.
5	Entregar pistas cuando sea necesario 'Verifica el diagrama de flujo de resolución de problemas para ver si es que hay una estrategia que sirva para avanzar'.	Para ayudar a los alumnos a encontrar dificultades que les impiden avanzar. Las pistas deberían seleccionarse con cuidado y antelación, para no revelar la solución.
6	Brindar extensiones cuando sea necesario, '¿Qué pasa si...?', '¿Puedes elaborar problemas similares?	Para desafiar a los alumnos que terminan antes a generalizar a un problema similar.
7	Requiere que los alumnos obtengan una solución para responder al problema. '¿Utilizaste toda la información importante?' '¿Es correcta la respuesta?'	Para que los alumnos revisen su trabajo.

Actividad	Tiempo	Propósito
DESPUÉS (discusión con toda la clase)		
8	Mostrar y discutir las soluciones con la ayuda del diagrama de flujo para la resolución de problemas.	Para mostrar las diferentes estrategias que sirvieron para encontrar una solución.
9	De ser posible, relacionar el problema con problemas anteriores y discutir o resolver extensiones del problema.	Para demostrar que las estrategias de resolución de problemas no son específicas a un problema y ayudar a los alumnos a reconocer las diferentes situaciones en las cuales ciertos tipos de estrategias pueden ser útiles.
10	De ser adecuado, hablar sobre los detalles específicos del problema, tales como una imagen que acompañe a la descripción del problema.	Para mostrar cómo las características específicas de un problema influyen en las ideas de los alumnos.

Conclusión

Para poder realizar clases de resolución de problemas exitosas, los profesores deben confiar en sus propias capacidades para resolverlos. Los profesores pueden fortalecer su propia confianza de la misma manera que lo hacen sus alumnos: con buenas experiencias de resolución de problemas. La información que se ha entregado en este capítulo, por medio de ejemplos de problemas y estrategias de resolución de problemas, puede ser insuficiente para que los profesores practiquen. Sin embargo, los profesores cuentan con abundantes recursos disponibles donde encontrar problemas para reforzar sus conocimientos. La resolución de problemas en las clases de educación básica se debe presentar de manera gradual. El profesor cumple una función diferente como facilitador, en comparación con su rol en una clase expositiva. Desde el punto de vista de los alumnos, es posible que se sientan inseguros en un principio, pues no cuentan con los algoritmos directos para resolver el problema y se ven obligados a pensar detenidamente. El profesor debe fomentar un entorno de apoyo, ayudando a los alumnos con pistas adecuadas y guiándolos con el fin de que se atrevan a proponer soluciones sin tener miedo de hacer el ridículo.

A modo de conclusión de este capítulo, esperamos que, más allá de enseñar a sus alumnos estrategias para resolver problemas, el profesor piense en la función que cumple cuando invita a que los alumnos participen en el proceso de resolución de problemas y se pregunte lo siguiente:

- ¿Estoy ayudando a que mis alumnos se interesen en el problema y acepten el desafío de resolverlo? [*¿Cómo se presenta el problema? ¿Se puede realmente considerar como un problema?*]
- ¿He formado un entorno de apoyo que motive a los alumnos a probar diferentes enfoques? [*¿Felicito a los que hacen buenas preguntas y utilizo las sugerencias de mis alumnos?*]
- ¿He entregado un marco que sirva para que mis alumnos reflexionen acerca de los procesos y aprendan de su experiencia? [*¿He recalcado la comprensión del problema? ¿Hemos hablado sobre las estrategias después de resolver el problema?*]
- ¿Qué tan bien he planificado mi clase? [*¿He escogido un problema que se ajuste a las capacidades de mis alumnos? ¿He analizado el problema y su solución para dar pistas apropiadas y preguntas que sirvan de guía al momento de ayudar a mis alumnos a avanzar?*]

Referencias

Charles, R. I. & Lester, F. K. (1984). *Problem solving: What, why and how?* Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Cockcroft Report. (1982). *Mathematics count: Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in school*. Londres: HMSO.

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (2000). *Revised syllabus for primary mathematics*. Singapur: Ministerio de Educación.

Foong, P. Y. (1990) *A metacognitive-heuristic approach to mathematical problem solving.* Tesis doctoral no publicada. Melbourne: Monash University.

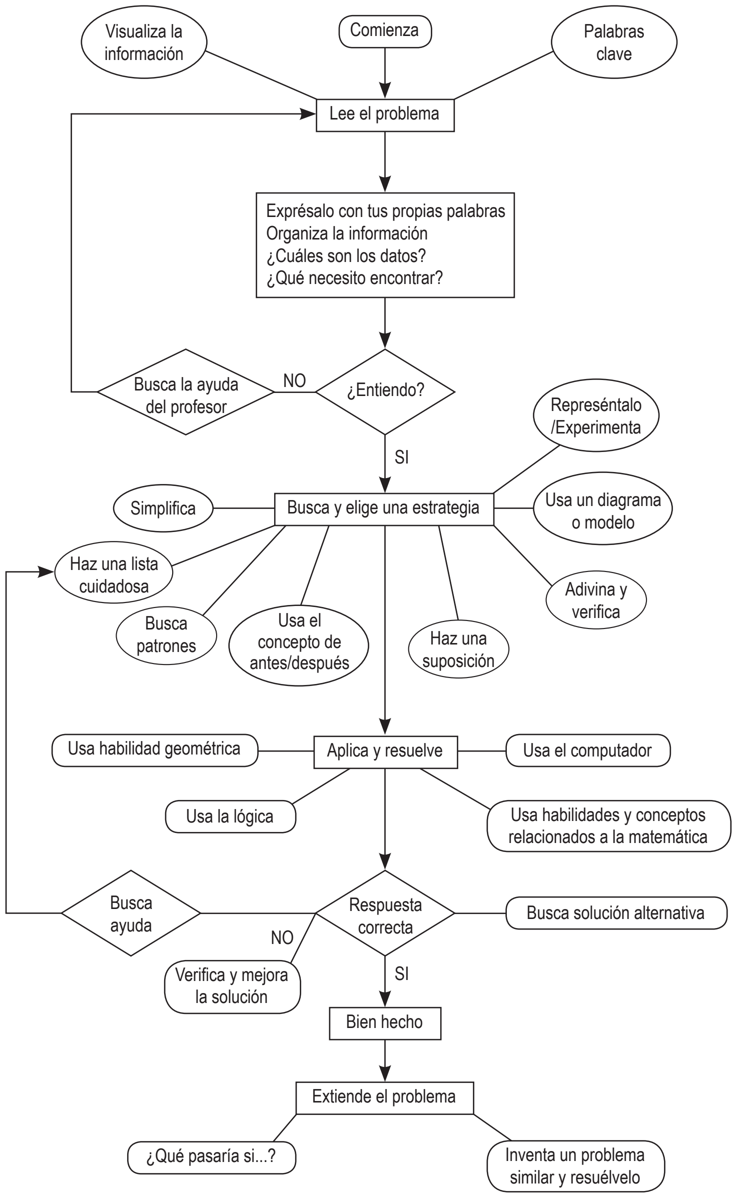
Kho, T. H. (1987). *Mathematical models for solving arithmetic problems. En Proceedings of the Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education* (ICMI-SEAMS) (Junio 1-3) (pp. 345-352). Singapur: Instituto de Educación.

Lester, F. K. (1983). *Trends and issues in mathematical problem-solving research.* En R. Lesh & M. Landau (Eds.). Acquisition of mathematical concepts and processes. Nueva York: Academic Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. Polya, G. (1971). How to solve it. (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Anexo 4-1

Diagrama de flujo del proceso de resolución de problemas



Anexo 4-2

Formato de un plan para una clase de resolución de problemas

El problema

Actividades de enseñanza - ANTES

1. Lea el problema con los alumnos o pida a uno que lo lea.

2. Converse con toda la clase. Añada sus comentarios o preguntas específicas sobre el problema.

a) ....

b) ....

c) ....

3. (Opcional) Discuta con todos los alumnos en la clase las posibles estrategias de solución.

Actividad - DURANTE

4. Observe y haga preguntas a los alumnos para identificar en qué etapa del proceso de resolución del problema se encuentran.

5. Entregue pistas cuando sea necesario. Añada sus pistas específicas.

a) ....

b) ....

c) ....

6. Extienda el problema según sea necesario. Añada sus preguntas específicas.

a) ....

b) ....

c) ....

7. Para los alumnos que encuentran la solución, pida que respondan el problema.

....

Actividad - DESPUÉS

8. Converse acerca de las soluciones y estrategias. Añada sus comentarios específicos.

a) ....

b) ....

[Insertar soluciones aquí]

Resumen/comentarios

9. De ser posible, relacione el problema con problemas anteriores y discuta o resuelva extensiones del problema.

10. De ser apropiado, converse acerca de las características especiales del problema. Añada sus comentarios específicos.

a) ....

b) ....

c) ....

Capítulo 5

Evaluación: pruebas escritas en las escuelas de Singapur

Yeap Ban Har y Lee Ngan Hoe

Las pruebas de matemática por lo general son pruebas en formato lápiz y papel, en las cuales las preguntas de la prueba vienen escritas y los alumnos responden en forma escrita. El objetivo de este capítulo es describir los distintos tipos de preguntas que usualmente se incluyen en las pruebas escritas en los colegios de Singapur. Asimismo, se muestra cómo estas preguntas se pueden integrar para crear un buen instrumento de evaluación.

En este capítulo se entrega el conocimiento básico para la preparación de evaluaciones. Se debe señalar, no obstante, que el proceso de diseñar una prueba escrita es un arte que requiere más teorías que las que se incluyen en este capítulo. Además, esta labor exige mucha práctica y años de experiencia en el ámbito de la pedagogía.

En la primera parte se describen las etapas claves en el diseño de preguntas y los conceptos correspondientes, tales como el objetivo de la prueba, el nivel cognitivo y la validez. La segunda parte se centra en los distintos tipos de preguntas que se adoptan en las pruebas normales en las escuelas de Singapur, incluidos sus propósitos y estructuras. Se describe el diseño de los distintos tipos de pregunta, tales como las preguntas de respuesta corta, los preguntas de selección múltiple y las preguntas de respuestas extensas. La tercera parte se enfoca en la forma de montar las distintas preguntas para dar forma a una prueba válida, una prueba que mide la capacidad matemática de forma precisa. La cuarta parte se enfoca en el diseño de un esquema de puntajes, a fin de conformar una prueba confiable que permita obtener mediciones coherentes. Al cierre del capítulo se invita a los lectores a analizar las limitaciones de las pruebas escritas. Sin embargo, se debe mencionar que en este capítulo no se incluyen estrategias para métodos alternativos de evaluación que complementen las pruebas escritas dentro de un marco de evaluación integral.

Introducción

Diversas estrategias de evaluación

Los profesores planifican y conducen clases a fin de implementar el currículo. La evaluación es el proceso de recolectar información y hacer inferencias con respecto a si los alumnos alcanzaron los objetivos del currículo y qué tan bien lo hicieron. Algunos de estos objetivos son cognitivos, mientras que otros son afectivos o metacognitivos. Las inferencias pueden ayudar a los profesores a averiguar lo que han aprendido los alumnos para así planificar clases posteriores y estrategias de enriquecimiento y recuperación. Estas evaluaciones son de naturaleza continua y se les llama *evaluaciones formativas*. Muchas de estas estrategias de evaluación son adaptables e informales. Las inferencias también se pueden utilizar para resumir el aprendizaje de los niños al finalizar el año (tales como en las evaluaciones semestrales[1]) o al final de la enseñanza básica (tales como en el Examen de Egreso de la Educación Básica[2]). El puntaje se utiliza para decidir la siguiente etapa en la educación de los niños. Este tipo de exámenes se llaman *evaluaciones sumativas*. Las pruebas en clase, los exámenes escolares y los exámenes nacionales se rinden en un contexto formal. En la mayoría de los casos en matemática, tales pruebas y exámenes toman la forma de una prueba escrita (lápiz y papel).

Actividad 1

Escriba una lista de las estrategias de evaluación formativa que se utilizan en las clases de matemática de la enseñanza básica. ¿Son estas estrategias de naturaleza formal o informal? ¿Implican estas estrategias el uso del formato lápiz y papel?

Objetivo de una pregunta

El objetivo de una pregunta de evaluación es averiguar si se han cumplido uno o más aspectos de los objetivos del currículo. El currículo de Singapur se centra principalmente en desarrollar la capacidad de resolver problemas conocidos y nuevos. Los objetivos de enseñanza especifican los contenidos que se espera que los alumnos aprendan en un año escolar dado. Por ejemplo, los alumnos de tercer año de educación básica deberían ser capaces de sumar fracciones relacionadas.

---

[1] En las escuelas de Singapur, las evaluaciones semestrales (ES) usualmente se llevan a cabo dos veces al año cada semestre. Además de las ES, las escuelas por lo general imparten evaluaciones continuas (EC).

[2] El Examen de Egreso de la Educación Básica es un examen que se rinde al finalizar los seis años de enseñanza básica en las escuelas de Singapur.

Los *objetivos de evaluación* se utilizan para determinar el logro de los niños con respecto a los objetivos de enseñanza. Un objetivo de evaluación indica la habilidad que la pregunta trata de evaluar. Un ejemplo de objetivo de evaluación es 'sumar fracciones'.

Los *niveles cognitivos* se utilizan para determinar el nivel cognitivo al que deberían apuntar los objetivos de enseñanza. ¿Pueden los niños sumar fracciones? ¿Pueden los niños identificar situaciones básicas y familiares donde la suma de fracciones sea pertinente? ¿Pueden los niños resolver nuevos problemas que impliquen la suma de fracciones? Existen varias formas de determinar los niveles cognitivos de las preguntas de evaluación. Una de ella es utilizar la taxonomía de Bloom para los niveles cognitivos. Las preguntas de evaluación se clasifican según el nivel de conocimiento, de comprensión y de aplicación de la pregunta. En este capítulo, se utiliza un sistema de clasificación más sencillo. Las preguntas se clasifican en aquellas que miden la competencia básica, las que implican la resolución de problemas rutinarios y las que implican la resolución de problemas nuevos.

- Pregunta 1 (competencia básica)

  Encuentra el valor de $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$.

  La pregunta 1 se incluye para evaluar la competencia básica de los niños en cuanto a la suma de fracciones.

- Pregunta 2 (resolución de problemas rutinarios)

  Anita, Betty y Cindy comparten una pizza.

  A Anita le toca $\frac{1}{3}$ de la pizza.

  A Betty le corresponde $\frac{1}{2}$ de la pizza.

  El resto de la pizza es de Cindy.

  ¿Qué fracción de la pizza les toca a Anita y a Betty?

La pregunta 2 requiere que los niños modelen la situación dada como una que exige la suma de fracciones. Después, los niños tienen que sumar las fracciones. Por lo tanto, la pregunta 2 mide la capacidad de los alumnos de resolver problemas que implican la suma de fracciones. Sin embargo, esta es una tarea que ya conocen. Esta situación es común en los textos escolares y en otros materiales de enseñanza que los niños utilizan. La pregunta 2 evalúa la resolución de un problema rutinario que implica la suma de fracciones.

- Pregunta 3 (resolución de un problema nuevo)

  Los símbolos △ y • indican números enteros.

  $\frac{1}{\triangle} + \frac{1}{\bullet} = \frac{7}{12}$

  ¿Cuál de las siguientes alternativas no puede ser un valor de los símbolos?

  (1) 6 (2) 2

  (3) 3 (4) 4

La pregunta 3 no es una tarea típica. Esta situación no es común en los textos escolares ni en otros materiales de enseñanza que los niños utilizan. No hay un procedimiento fijo para completar la tarea. Los niños pueden utilizar algunos de los métodos de resolución de problemas que han aprendido. Aquellos que demostraron mejores hábitos de resolución de problemas y metacognición, por lo general, obtienen mejores resultados. La pregunta 3 evalúa la resolución de un problema nuevo que implica la suma de fracciones.

Los objetivos de la evaluación y los niveles cognitivos nos permiten verificar la validez de una pregunta. Podemos analizar una pregunta a fin de verificar si mide el objetivo de enseñanza en el nivel cognitivo deseado. Una pregunta no es válida cuando, al responder, los niños no trabajan principalmente la competencia que se indica en el objetivo de evaluación en el nivel cognitivo deseado.

En una prueba donde los niños no tienen ningún apoyo para calcular (como una calculadora), el cálculo no debería ser algo tedioso. La siguiente es una mala alternativa para la pregunta 1, especialmente en un currículo que enfatiza más la comprensión conceptual y la resolución de problemas y menos los cálculos.

Encuentra el valor de $\frac{1}{13} + \frac{7}{15}$

El uso de cifras grandes en las preguntas de evaluación escritas por lo general afectan la validez. ¿Qué otros elementos podrían afectar la validez de las preguntas de evaluación?

Actividad 2

Escriba un objetivo para la prueba. Escriba distintas preguntas de evaluación para este objetivo de evaluación en tres niveles cognitivos diferentes.

Tipos de preguntas de evaluación

Preguntas de selección de respuesta y de construcción de respuesta

En las pruebas a lápiz y papel, los niños responden escribiendo. En algunas preguntas, los alumnos seleccionan sus respuestas de una lista de alternativas. Estas preguntas se llaman *respuestas de selección*. En otras preguntas, los niños tienen que construir sus respuestas. En tales preguntas, también se mide la capacidad de los niños de comunicar sus respuestas por escrito. Estas preguntas se llaman preguntas de construcción de respuestas. Usualmente, se espera que los niños de los niveles más altos de la educación básica (quinto y sexto) entreguen respuestas construidas con mayor frecuencia que aquellos de niveles más bajos (primero a cuarto).

Preguntas de respuesta corta

En las preguntas de respuesta corta, los niños sencillamente tienen que dar una respuesta final, la que puede estar acompañada o no por los cálculos. El ejercicio corto se considera relativamente obvio, por lo que no importa si se incluye o no. Un niño más capaz no necesita incluir el cálculo que lleva a la respuesta. Un niño menos capaz, en cambio, quizás necesita realizar un cálculo como un paso intermedio. En las preguntas de respuesta corta, los niños escogen entre dar una respuesta final o incluir partes del proceso de trabajo.

Las preguntas de respuesta corta se pueden utilizar para evaluar competencias básicas, tales como calcular y utilizar procedimientos estándar.

- Pregunta 4

  Objetivo de la prueba: sumar decimales

  Nivel cognitivo: competencia básica

  Encuentre el valor de 2,5 + 8,07.

- Pregunta 5

  Objetivo de la prueba: dividir fracciones por un número natural

  Nivel cognitivo: competencia básica

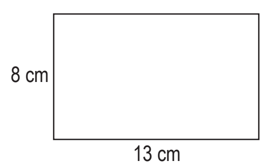
  Encuentre el valor de $\frac{3}{4} \div 6$.

- Pregunta 6

  Objetivo de evaluación: encontrar el perímetro de una figura

  Nivel cognitivo: competencia básica

  Encuentre el perímetro del rectángulo.



Las preguntas de respuesta corta se pueden utilizar para medir la capacidad de resolver problemas cotidianos de un paso. En estas preguntas, la respuesta se obtiene tras unos pocos cálculos. Sin embargo, algunos niños son capaces de encontrar la respuesta sin tener que trabajar el ejercicio explícitamente. Se considera que el cálculo es lo suficientemente obvio para los estudiantes, por lo que si deciden excluirlo, no se debe penalizar la ausencia del mismo cuando obtienen la respuesta correcta. Las preguntas 7 y 8 son algunos ejemplos.

- Pregunta 7

  Objetivo de evaluación: calcular el porcentaje

  Nivel cognitivo: resolución de problema rutinario

  De una clase de 40 niños, 22 están en el coro.

  ¿Qué porcentaje de los niños de la clase participan en el coro?

- Pregunta 8

  Objetivos de prueba: convertir metros a centímetros y viceversa, y sumar longitudes.

  Nivel cognitivo: resolución de problemas rutinarios

  Juan es 15 cm más bajo que Margarita.

  Juan mide 1,5 metros de alto.

  ¿Cuál es la altura de Margarita en cm?

Las preguntas de respuesta corta también se pueden utilizar cuando la respuesta es un dibujo o cuando a los niños se les pide que lean. En tales instancias, la respuesta final se puede entregar en forma escrita. Por lo tanto, el formato de respuesta corta es adecuado.

Usualmente, se pueden proponer dos a tres preguntas a partir de un mismo conjunto de información, a fin de compensar el tiempo que les toma a los niños comprender la información.

Objetivo de evaluación: resolver problemas con cálculo de tarifas

Nivel cognitivo: resolución de problema rutinario

En la tabla se muestran los precios del estacionamiento del edificio Singapura, de 7 am a 12 pm. Utilice la tabla para contestar las preguntas 9 y 10.

Primera hora	$180 pesos
Cada media hora siguiente	$100 pesos
Después de las 5 pm	$300 pesos por entrada

- Pregunta 9

  El Sr. Azman estacionó su auto en el edificio Singapura desde las 3:45 pm hasta las 5:10 pm. ¿Cuál es la tarifa de estacionamiento que debe pagar?

- Pregunta 10

  La Sra. Berríos se dio cuenta que solo tenía $430 pesos.

  Entró al estacionamiento del edificio Singapura a las 11:50 am.

  ¿Hasta qué hora puede quedarse en el estacionamiento con el dinero que tiene para pagar la tarifa?

Preguntas de respuesta larga

Por lo general, las preguntas de respuesta larga son problemas con varios pasos, donde los niños tienen que comunicar sus métodos de solución. Algunas preguntas de respuesta larga no tienen estructura, mientras que otra sí. Algunas preguntas se estructuran con el fin de guiar a los niños en la resolución de un problema más grande. En estas preguntas, la primera parte cumple una función fundamental para resolver la segunda. Otras preguntas se estructuran con el fin de que los alumnos se enfrenten a problemas menores que se puedan resolver a partir del mismo conjunto de información. Usualmente, en una prueba, las preguntas estructuradas están antes que las no estructuradas.

Las preguntas 11 y 12 corresponden a preguntas no estructuradas de respuesta larga que provienen de dos dominios diferentes. En cada problema, los niños tienen que identificar los problemas secundarios que se tienen que resolver. Las soluciones a las preguntas de respuestas largas no estructuradas por lo general implica realizar varios pasos, los que se pueden mostrar por escrito.

- Pregunta 11

  La Sra. Leiva tiene billetes de $2, $5 y $10 dólares.

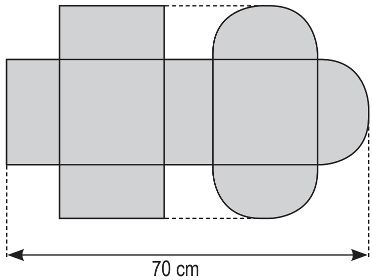
  El dinero que tiene en billetes de $2, $5 y $10 se encuentra en la razón 3 : 10 : 5.

  Después de utilizar $\frac{2}{3}$ de los billetes de $2 y 16 de los billetes de $5, solo le quedan $240 dólares.

  ¿cuánto dinero tiene en billetes de $10?

- Pregunta 12 (SEAB, 2005, p. 32)

  La figura está compuesta de 2 cuadrados idénticos, 4 rectángulos idénticos y 3 semicírculos idénticos. ¿Cuál es el área de la figura? (Considere $\pi = 3{,}14$)



La pregunta 13 corresponde a una pregunta de respuesta larga donde de la primera parte se obtiene información para resolver la segunda parte.

- Pregunta 13

  Bruno y Tomás ahorran cada uno un monto fijo cada día.

  Tomás, que empezó ahorrando antes, ahorró $3 dólares por día.

  A los 20 días de ahorro de Tomás, Bruno había ahorrado $20.

  A los 26 días de ahorro de Tomás, Bruno había ahorrado $44.

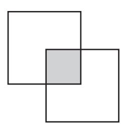
  (a) ¿Cuánto ahorra Bruno cada día?

  (b) ¿Cuántos días habrán pasado desde que Tomás empezó a ahorrar si los ahorros totales de los dos suman $164?

La pregunta 14 corresponde una pregunta de respuesta larga estructurada, donde la primera y la segunda parte no se relacionan. Esencialmente, son dos problemas pequeños creados a partir de la misma información.

- Pregunta 14

  Jack dibuja una figura como la que se muestra a continuación.



  La figura está compuesta por 2 cuadrados, cada uno de 8 cm.

La parte sombreada corresponde a un cuadrado cuyo lado mide 4 cm.

(a) Encuentre el perímetro de la figura.

(b) Encuentre el área de la figura.

Las preguntas de respuesta larga sirven para evaluar la resolución de problemas. Las preguntas no estructuradas permiten a los alumnos demostrar su habilidad para identificar y llevar a cabo pasos intermedios. Las preguntas estructuradas les dan a los niños ciertas pautas para resolver problemas. Estas preguntas también son útiles para que los niños puedan resolver problemas más acotados a partir de algunos datos útiles.

Preguntas de selección múltiple

Mientras las preguntas de respuesta corta y las preguntas de respuesta larga corresponden, por lo general, a preguntas donde se debe construir la respuesta, las preguntas de selección múltiple corresponden a preguntas donde hay que seleccionar una respuesta. Comúnmente, se presenta una raíz del problema y se ofrecen entre cuatro y seis distintas alternativas. Una de las alternativas es la respuesta correcta. A la alternativa con la respuesta correcta la llamamos 'clave'. En este tipo de pregunta, los niños contestan sombreando sus alternativas en un formulario. Las opciones incorrectas, conocidas como 'distractores', entregan información sobre los conceptos errados de los niños o los patrones de error. Si no se cuenta con suficientes distractores, entonces el formato de selección múltiple no probará ser útil.

- Pregunta 15

Objetivo de evaluación: sumar números de 3 dígitos

¿Cuál es el valor de 26 + 137?

(1) 153	(2) 163
(3) 397	(4) 1513

En la pregunta 15, la raíz comprende solo una pregunta. La clave es la alternativa (2). Cada distractor afirma un patrón de error que es común en los niños de los primeros cursos de educación básica. ¿Puede describir el patrón de error?

Aunque lo anterior es el formato preferido para este tipo de preguntas, a veces, a los alumnos más jóvenes se les presenta en un formato donde tienen que completar oraciones. El formato que se muestra a continuación es útil si los niños están familiarizados con él.

26 + 137 = ______

(1) 153 (2) 163

(3) 397 (4) 1513

Las opciones se organizan de acuerdo con cierto orden. En la pregunta 15, las opciones se encuentran en orden ascendente. No obstante, hay instancias donde estas opciones no se encuentran ordenadas ni en orden ascendente ni descendente. En la pregunta 16, las opciones no se pueden organizar ni de forma ascendente o descendente, porque invalidaría la pregunta. Es posible que algunos niños que no han cumplido el objetivo de la prueba respondan correctamente una pregunta que no tiene validez.

- Pregunta 16

  Objetivo de evaluación: comparar números decimales

  ¿Cuáles de los siguientes números es el mayor?

  (1) 0,6 (2) 0,71
  (3) 0,095 (4) 0,604

En el caso de que la respuesta sea numéricamente similar a la etiqueta de la alternativa, esta respuesta se debería poner en dicha etiqueta. Por ejemplo, en la pregunta 17, la opción 2 se coloca en (2). ¿Cómo aumenta esto la validez de la pregunta? ¿Por qué se utilizan números pequeños?

- Pregunta 17

  Objetivo de evaluación: utilizar el orden de las operaciones

  ¿Cuál es el valor de $30 - (6 + 12) \div 3 \times 2$?

  (1) 8 (2) 2

  (3) 18 (4) 27

Actividad 3

Realice un análisis de distintas preguntas de selección múltiple. Se debe identificar el objetivo de evaluación y el nivel cognitivo de la pregunta. Se describe además el error asociado con cada distractor. El siguiente es un ejemplo.

- Objetivo de evaluación: utilizar el orden de las operaciones

  Nivel cognitivo: competencia y conocimiento básico

¿Cuál es el valor de $30 - (6 + 12) \div 3 \times 2$?

(1)	8	Los niños evalúan la expresión de izquierda a derecha.
(2)	2	Los niños evalúan $30 - (6 + 12)$ y 3×2 primero.
(3)	18	Los niños realizan las operaciones en el orden correcto.
(4)	27	Los niños multiplican antes de dividir.

El formato de selección múltiple no se limita a evaluar la competencia básica y la resolución de problemas rutinarios. También se puede evaluar la resolución de problemas nuevos utilizando este formato. Esto es válido especialmente si es que no se puede demostrar con facilidad el proceso en papel. La pregunta 18 es un ejemplo de este problema.

- Pregunta 18

  Objetivo de evaluación: multiplicar números de hasta 4 dígitos con un número de 1 dígito

  Nivel cognitivo: resolución y aplicación de un problema nuevo

  Las diferentes letras representan diferentes dígitos.

  Las letras iguales representan el mismo dígito.

  AMOR × 9 = ROMA

  ¿Cuál es la letra que toma el lugar del dígito 9?

  (1) A

  (3) O

  (2) M

  (4) R

Esta pregunta ha sido diseñada para evaluar el conocimiento que tienen los niños de los números en relación con la multiplicación. ¿Aprenden los alumnos aspectos generales de la multiplicación después de llevar a cabo numerosos cálculos? Por ejemplo, ¿se dan cuenta de que cuando se multiplica por 9, el producto suele tener un dígito más que el número original, a menos que el número comience con el 1? Si lo hacen, entonces los niños se darán cuenta de que la letra A tiene que ser 1. Por lo tanto, $A = 1$, entonces $R = 9$. Esta pregunta requiere un nivel de competencia que sobrepasa el nivel básico de la multiplicación. La capacidad de multiplicar un número por un número de un dígito es necesaria, pero no suficiente. Se requiere ser capaz de resolver problemas. Como esta tarea no es común para muchos estudiantes, la pregunta es nueva.

La pregunta 18 también muestra un ejemplo donde los distractores no nos dicen nada sobre los errores de concepción o de patrones de los niños. El problema es, naturalmente, un tipo de respuesta seleccionada, dado que requiere que se identifique una de las cuatro letras que representan el dígito 9.

Actividad 4

Escriba los diferentes tipos de preguntas. Trabaje en grupo para criticar cada pregunta y mejorarlas.

Planificar una prueba

Planificar controles de unidad

En los controles de unidad, se miden los distintos objetivos de enseñanza. Para los niños, los temas que se tienen que medir todavía son nuevos. La evaluación debe ser capaz de ayudar a los profesores a identificar debilidades específicas y planificar medidas correctivas posteriores.

Actividad 5

- Caso 1

La Sra. Ana es una profesora sustituta sin experiencia práctica. Redactó una prueba que se utilizará al final de la unidad. En esta unidad sus alumnos de primer año de enseñanza básica han aprendido a sumar números de un dígito. Sus pruebas constan de 5 preguntas.

1. 8 + 1 =
2. 5 + 3 =
3. 9 + 4 =
4. 7 + 4 =
5. 6 + 3 =

- Caso 2

La Sra. Villa es una profesora de primer año de enseñanza básica con años de experiencia. Redactó una prueba un tanto diferente para el final de la misma unidad.

1. ●●●●●●●● ●●●●

   8 + 4 =

2. ♦♦♦♦♦

   5 + 7 =

   9 + 5 =

3. 7 + 4 =
4. 2 + 9 =
5. 7 + 0 =

Compare ambas pruebas. ¿En qué difieren?

Al planificar una prueba de unidad, las preguntas de la prueba tienen que ayudar a los profesores a encontrar si los niños han logrado los objetivos de enseñanza. Si no han alcanzado los objetivos completamente, entonces el profesor tiene que ser capaz de identificar las dificultades específicas.

Al planificar una prueba, los profesores tienen que anticipar un formato para el informe posterior. A continuación, se muestra la hoja de informe de la profesora Villa para el control de la unidad.

Suma de números de un dígito		**Andrés**
Competencia	**Observada**	**Comentarios**
Capaz de sumar con la ayuda de dibujos o imágenes	Sí	Preguntas 1 a 4 correctas Respuesta 8 incorrecta
Capaz de sumar sin la ayuda de imágenes	Sí	
Puede sumar cero a un número	No	

Suma de números de un dígito		**Beatriz**
Competencia	**Observada**	**Comentarios**
Capaz de sumar con la ayuda de dibujos o imágenes	Parcial	Pregunta 1 correcta Pregunta 2 incorrecta Preguntas 3 y 4 incorrectas
Capaz de sumar sin la ayuda de imágenes	No	
Puede sumar cero a un número	Sí	

De manera alternativa, se puede planificar un control de unidad de la misma manera que se planifica un examen semestral, donde los informes finales consisten en un puntaje o número que indica el logro o, en su defecto, un objetivo de enseñanza específico.

Planificar exámenes semestrales

En los exámenes semestrales, el puntaje o la nota que los niños obtienen debe significar algo. Por lo tanto, si una alumna de cuarto año de enseñanza básica obtiene 80 %, el profesor y los padres entienden que le está yendo bien en matemática. No obstante, puede que ella no sea capaz de responder algunos problemas nuevos. Las tablas 5-1 y 5-2 proveen ejemplos de lo que significan los puntajes de las pruebas a lápiz y papel en los colegios de Singapur[3].

Tabla 5-1 Esquema de notas de 1° a 4° año de educación básica

Banda de logro	**Intervalo de puntajes**	**Descripción breve**
1	85% a 100%	El estudiante es capaz de resolver problemas nuevos.
2	70% a 84%	El estudiante es capaz de resolver problemas, pero le cuesta resolver aquellos nuevos.
3	50% a 69%	El estudiante puede realizar cálculos básicos y tareas rutinarias.
4	Bajo el 50%	El estudiante no puede completar cálculos básicos ni tareas rutinarias a un nivel satisfactorio.

Tabla 5-2 Esquema de notas para 5° y 6° año de educación básica (plan de estudios regular)

Nota	**Intervalo de puntajes**	**Descripción breve**
A*	91% a 100%	El estudiante es capaz de resolver problemas nuevos, incluyendo aquellos no guiados.
A	75% a 90%	El estudiante es capaz de resolver problemas, incluyendo algunos nuevos, con algo de ayuda.
B	60% a 74%	El estudiante es capaz de resolver problemas conocidos.
C	50% a 59%	El estudiante es capaz de resolver algunos problemas básicos.
D	35% a 49%	El estudiante es capaz de hacer cálculos básicos y tareas rutinarias.
E	20% a 34%	El estudiante es capaz de hacer solo cálculos básicos y tareas rutinarias en el nivel inferior de educación básica.
U	Bajo el 20%	El estudiante no es capaz de hacer cálculos básicos ni tareas rutinarias en el nivel inferior de educación básica.

Una vez que se ha decidido el esquema de notas, los profesores podrán determinar la proporción de las preguntas que requieren cálculos y procedimientos básicos, resolución de problemas comunes y resolución de problemas no comunes.

Como lo explica un profesor que ha sido director del departamento de matemática de su escuela: un examen semestral por lo general comprende un 30 % de cálculos básicos y preguntas de procedimiento y un 50%

[3] Consulte la Guía de Evaluación de las Matemáticas a nivel de Educación Básica (Assessment Guide to Primary Mathematics - 2004) publicada por el Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC), Ministerio de Educación de Singapur, para más detalles.

de problemas conocidos. Las preguntas que restan pueden ser problemas nuevos. Un niño o niña que logra menos de un 30 % no domina ni los cálculos ni los procedimientos básicos. Un niño o niña que logra cerca de un 50 % puede, generalmente, hacer cálculos y procedimientos básicos. Asimismo, es capaz de realizar algunos problemas comunes que se resuelven en un paso. Un niño o niña que logra cerca de un 70 % puede realizar la mayoría de las tareas, excepto los problemas nuevos. El profesor explica que él utiliza esta proporción año tras años, para que los puntajes retengan un sentido.

Al momento de planificar un examen semestral, una herramienta que usualmente se utiliza en las escuelas de Singapur es la Tabla de Especificaciones. Esta tabla es como un planilla para el examen. En ella se indican las competencias que se deben medir, en qué proporción y en qué nivel cognitivo. La tabla 5-3 muestra un ejemplo.

Tabla 5-3 Tabla de especificaciones

Tema u objeto de enseñanza específico	**Tiempo de enseñanza**	**Proporción de notas**	**Sección A**			**Sección B**			**Sección C**		
			C	O	A	C	C	A	C	C	A
			CCA total						30	50	20

El número de preguntas sobre un tema depende del tiempo que se haya dedicado para enseñarlo en clases. Por ejemplo, si se utilizaron 4 de 20 semanas para ver un tema, entonces el 20 % de las notas de todo el examen se deben basar en este tema. Se recomienda que la distribución de preguntas en los diferentes niveles cognitivos sea 30 % : 50 % : 20 %. Si uno utiliza la taxonomía de Bloom, entonces cerca del 30 % de las notas provienen de preguntas a nivel de conocimiento (C), 50 % de nivel de comprensión (C) y el resto del nivel de aplicación (A). Si se utiliza un sistema de clasificación diferente, el 30 % de la nota proviene de preguntas que evalúan los cálculos y procedimientos básicos, 50 % proviene de aquellas que evalúan la resolución de un problema familiar y el resto de ellas mide la capacidad de resolver problemas nuevos y sin guía.

La tabla también permite revisar la distribución de las preguntas con respecto a los niveles cognitivos en cada sección. Por ejemplo, es poco común dedicar gran parte a problemas nuevos en la sección de respuestas cortas. Por lo general, las preguntas de selección múltiple contienen preguntas de diferentes niveles cognitivos, pero hay más preguntas de competencia básica y de resolución de problema rutinarios. La sección de preguntas de respuesta corta comprende por lo general preguntas que miden habilidades básicas y resolución de problemas rutinarios. La sección de preguntas de respuesta larga tiene un porcentaje bajo de preguntas que miden la competencia básica. La mayor parte de los problemas no rutinarios debería ir en esta sección.

Preparación de un esquema de puntajes

Un esquema de puntajes se prepara al mismo tiempo que se formulan las preguntas de la prueba. El esquema de puntajes se diseña para determinar cómo se deben calificar las respuestas de los alumnos. Indica la proporción de la nota que se tienen que asignar al proceso y a la respuesta final. Por lo general, en las tareas comunes y rutinarias, el énfasis recae sobre la respuesta final. Para las tareas no rutinarias, se otorgan puntos si el proceso es correcto, aun cuando la respuesta final no lo sea. Para las tareas en las que es difícil mostrar el proceso en papel, la respuesta final se considera un indicador confiable del proceso.

Utilizar un esquema de puntajes refuerza la fiabilidad de la prueba. El puntaje que se asigna no depende del profesor, sino del trabajo que el alumno haya realizado. Esto se conoce como coherencia en las notas.

Utilizar un esquema de puntajes también aumenta la validez de la prueba. De igual forma, asegura que los niños reciban puntos principalmente por la competencia que se está midiendo y que no se les penalice en exceso por errores menores. Esto se conoce como relevancia de la nota.

Esquema de puntajes para preguntas de competencia básica

La mayoría de los alumnos que cursan los últimos años de educación básica es capaz de realizar cálculos básicos para encontrar el valor de $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ (vea pregunta 1). Por lo tanto, se espera que la respuesta final sea precisa. Esta pregunta se formula mejor como una pregunta de respuesta corta, donde solo se califica la respuesta final. En un esquema de puntajes típico, se asignará puntaje completo a una respuesta correcta o, de lo contrario, no se dará puntaje.

Sin embargo, para aquellos niños que recién aprendieron a sumar fracciones, se puede diseñar un esquema de puntajes en el cual se les otorgue puntaje completo por una respuesta correcta y puntaje parcial por una respuesta incorrecta con un paso intermedio correcto.

Respuesta	Esquema de puntaje para 4º	Esquema de puntaje para 6º
$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$	Método correcto - 1 punto Respuesta correcta - 1 punto	Método correcto - 0 punto Respuesta correcta - 1 punto
$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$	Método correcto - 1 punto Respuesta incorrecta - 0 punto	Respuesta incorrecta - 0 punto
$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{3+6}=\frac{3}{9}$	Método incorrecto - 0 punto	Método incorrecto - 0 punto
$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$	No se observa método Respuesta correcta - 2 puntos	No se observa método Respuesta correcta - 1 punto

Cuando esta pregunta se incluye en una prueba de cuarto año de educación básica, se le puede asignar como máximo dos puntos, mientras que en una prueba de sexto año se le puede asignar como máximo un punto.

La mayoría de los alumnos en los últimos años de la enseñanza básica pueden responder la pregunta 2 realizando cálculos mentales. Sin embargo, puede haber alumnos que hayan modelado la situación de manera correcta, pero que aun así no hayan llegado a la respuesta correcta. El modelamiento es uno de los componentes que se está midiendo, por lo que se le debería asignar puntaje cuando se haga de manera correcta. Esta pregunta se formula mejor como una pregunta de respuesta corta, donde se le asigna puntaje tanto al método como a la respuesta final. A continuación se muestra un esquema de puntajes típico.

Respuesta	Esquema de puntaje
$\frac{5}{6}$	No se observa método Respuesta correcta - 2 puntos
$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$	Método correcto - 1 punto Respuesta correcta - 1 punto
$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$	Método correcto - 1 punto Respuesta incorrecta - 0 punto

Por lo general, las preguntas que miden competencias básicas son preguntas de 1 o 2 puntos. Cuando la respuesta está correcta, se concede el puntaje completo, sin importar si se demuestra el método. Cuando la respuesta es incorrecta, se asigna puntaje si el método es correcto, siempre que se muestre.

Esquema de puntajes para preguntas de respuesta larga

A diferencia de las preguntas de competencia básica, en las preguntas de respuesta larga el método de solución es un componente importante. Si los niños no muestran el método, entonces no obtienen el puntaje completo. Lo que se penaliza es la falta de habilidad o disposición para comunicar el método, porque la comunicación dentro de la matemática es uno de los aspectos del currículo.

Por lo general, un esquema de puntajes comprende tres tipos de puntajes: M, A y B. Se asigna una puntaje M cuando se aplica el método correcto a los números que corresponden. No se penalizan los errores de cálculo, manipulación o unidades. El puntaje A se asigna cuando se responde de manera correcta o parcial. Se asignan una vez que se ha otorgado el puntaje M. No se asigna a las respuestas aparentemente correctas que se obtienen por medio de métodos incorrectos. El puntaje B se asigna a las respuestas correctas, sin importar el puntaje M. Nuevamente, no se da un puntaje B a las respuestas aparentemente correctas que se logran con métodos incorrectos.

> Una caja de tarjetas de felicitaciones se comparte de igual forma entre 35 niños. Siete de ellos les dan sus tarjetas al resto de los niños. Como resultado, el resto de los niños recibe 2 tarjetas más cada uno. ¿Cuántas tarjetas había en la caja al principio? (SEAB, 2005, p. 15)

Puntos	Puntaje asignado	Comentarios adicionales
2 × 28	M1	La penalización por respuestas correctas sin el proceso justificado debe decidirse antes de que se asignen puntos y notas, por ejemplo B2.
56 ÷ 7	M1	
8 × 35	M1	
280	A1	

Actividad 6

¿Cómo asignaría puntajes y notas a las siguientes respuestas utilizando el esquema de puntajes? ¿Cree que el sistema de puntajes que se presenta anteriormente es justo? Si no lo considera justo, ¿qué modificaciones realizaría?

La respuesta de David	La respuesta de Erina
28 × 2 = 56 56 ÷ 7 = 9 9 × 35 = 315 Al principio, había 315 tarjetas en la caja.	7 × 2 = 14 14 × 35 = 490 490 tarjetas

La respuesta de Francisco	La respuesta de Georgina
$28 \times 2 = 58$ $58 / 7 = 8$ r 2 $8 \times 35 = 280$ Al principio, había 280 tarjetas en la caja.	$56 \div 7 \times 35 = 280$

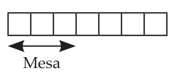
Un buen esquema de puntajes solo recompensa al alumno una vez por demostrar la habilidad. De igual manera, el mismo error no se penaliza más de una vez.

Una mesa y 4 sillas cuestan \$315. Una mesa cuesta tres veces más que una silla. Todas las sillas cuestan lo mismo. Encuentra el costo de la mesa.

Punto	**Puntaje asignado**	**Comentarios adicionales**
1 unidad por cada silla	M1	Antes de asignar las notas, se debe decidir si se penalizarán las respuestas correctas que no tengan el trabajo anotado o las respuestas sin unidades, por ejemplo, B2
3 unidades por mesa		
7 unidades → \$315	M1	
1 unidad → \$45	A1	
3 unidades → \$135	A1	

Actividad 7

¿Cómo asignarían los puntajes a las siguientes respuestas utilizando el esquema de puntajes anterior? En su opinión, ¿el último paso debería ser M1A1 en vez de solo A1? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Cree que el sistema de puntajes que se presenta anteriormente es justo? Si no lo considera justo, ¿qué modificaciones realizaría?

La respuesta de Julio	La respuesta de Inés
$315 \div 5 = 63$ La mesa cuesta \$63.	
La respuesta de Jeremías $315 \div 7 = 45 \times 3 = 315$	La respuesta de Carla $351 \div 7$

Este es un ejemplo de un esquema de puntajes que no penaliza a los niños de manera repetitiva por los mismos errores.

Se hace un collar con 2 piedras rojas y 8 azules. Se utilizan 40 piedras azules para hacer los collares. (a) ¿Cuántos collares se fabrican? (b) ¿Cuántas piedras se utilizan en total?

Punto	Puntaje asignado	Comentarios adicionales
(a) $40 \div 8 = 5$	M1 A1 o B2	La respuesta del alumno en (a) se utiliza para obtener la respuesta en (b).
(b) (a) $\times 10 = 50$ o (a) $\times 2 + 40 = 50$	M1 A1 o B1	

Actividad 8

¿Cómo asignaría los puntajes a las siguientes respuestas utilizando el esquema de puntajes anterior? más de una vez.

La respuesta de Luisa (a) $40 \div 10 = 4$ (b) $4 \times 10 = 40$	La respuesta de Manuel (a) $40 \div 8 = 5$ (b) $40 \times 10 = 400$
La respuesta de Nuria (a) $40 \times 2 = 80$ (b) $80 \times 10 = 800$	La respuesta de Osmán (a) 5 (b) $10 + 40$

Etapas en la preparación de pruebas

Por lo general, la administración de cada escuela determina la cantidad y los tipos de evaluación que se deben realizar. En el caso de los exámenes semestrales, el formato y la tabla de especificaciones usualmente los determina la administración local. Para los controles de unidades, es posible que los profesores tengan que tomar algunas decisiones. Sin embargo, la principal tarea reside en redactar las preguntas y preparar el esquema de puntajes.

A continuación se resumen las etapas en la preparación de una prueba:

1. Determinar el número de pruebas en un año académico y otros detalles, como el formato, los tópicos, y otros similares.
2. Preparar la tabla de especificaciones para cada prueba con respecto al plan de estudios, a fin de aumentar su validez.
3. Escribir las preguntas de evaluación.
4. Al mismo tiempo, escribir el esquema de puntajes.
5. Ensamblar las preguntas para armar la prueba de acuerdo con la tabla de especificaciones. Incluir las instrucciones para los alumnos.
6. Redactar instrucciones concisas para cada parte y para la prueba completa.
7. Editar cada una de las preguntas de la prueba, de preferencia con la ayuda de un colega.

8. Realizar los cambios finales y responder la prueba a fin de garantizar que no hayan errores tipográficos ni de otro tipo. Revisar el tiempo que se requiere para completar la prueba. Asegurarse de que el tiempo asignado no sea ni muy corto ni muy largo para rendir la prueba. Si hay un tiempo fijo para la prueba, se tienen que ajustar las preguntas.

Actividad 9

¿Cuáles son algunas de las limitaciones de las pruebas a lápiz y papel? ¿Qué información no puede entregar a los profesores este formato de evaluación? ¿Qué pueden hacer los profesores para conseguir esta información?

Referencias

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (2004). *Assessment guide to primary mathematics*. Singapore: Ministerio de Educación.

Singapore Examination and Assessment Board (SEAB). (2005). *PSLE mathematics (EMI/ EM2) examination questions 2000-2004*. Singapur: Hillview Publications.

Parte 2

La enseñanza de temas específicos

Capítulo 6

La enseñanza de números naturales

Yeap Ban Har y Lee Ngan Hoe

Introducción

El propósito principal de este capítulo es delinear la enseñanza de los conceptos de números naturales y compartir algunas estrategias que ayuden a que los estudiantes adquieran las diferentes capacidades que son importantes para su aprendizaje a futuro. El segundo propósito de este capítulo es que los lectores revisen los principios claves que ayudan a que cada alumno aprenda matemática. En este capítulo se ofrece una descripción de las diferentes iniciativas del Ministerio de Educación (ME) de Singapur y algunas sugerencias para implementarlas.

El capítulo se compone de cinco secciones principales. En la primera sección se describen los diferentes usos de los números naturales que se enseñan a los alumnos en educación básica. En la segunda sección se enseña la notación posicional. En la tercera se enseñan los diversos aspectos de la suma y la resta, y en la cuarta sección se enseña la multiplicación y división. En la última sección, se abordan las operaciones combinadas.

Significados de los números

Considere este caso: Andrés es capaz de recitar números naturales hasta 100, pero a veces no es capaz de contar el número de objetos en un conjunto. ¿A qué cree que se debe? Se debe a que estas dos tareas requieren diferentes habilidades.

En la canción infantil que se muestra en la Ilustración 6-1, los números naturales se utilizan como números para contar. Se espera que los alumnos sean capaces de contar hacia adelante y hacia atrás. Algunos son capaces de contar de dos en dos (2, 4, 6, 8, 6, ...).

Uno, dos
Vamos de a dos
Tres, cuatro
Al teatro
Cinco, seis
Se pone a llover
Siete, ocho
Me pongo un poncho
Nueve, diez
Me como una nuez

Ilustración 6-1 Contar con números

Cuando los niños juegan al luche (Ilustración 6-2), se les puede pedir que cuenten hacia adelante cuando saltan hacia adelante y que cuenten hacia atrás cuando se devuelvan al punto de inicio. Se pueden hacer variaciones a esta actividad si se les pide a los niños que comiencen a partir de otro número o que salten de dos en dos. En este caso, los niños utilizan los números naturales como números para contar.

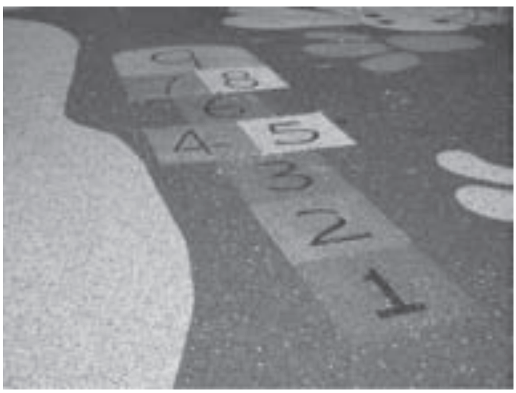


Ilustración 6-2 Rayuela

La capacidad de contar la cantidad de objetos en un conjunto requiere que los alumnos establezcan un vínculo directo entre el número y los objetos. En la ilustración 6-3, se muestran dos ejercicios diseñados para que los alumnos utilicen los números naturales como números cardinales. Los números cardinales sirven para cuantificar objetos. ¿Cuál de las dos hojas de ejercicio prefiere?

Aparte de contar objetos que aparecen representados en dibujos, los alumnos también deben tener la experiencia de contar objetos reales. Entre la gama de actividades se incluye contar botones, contar peces en un acuario y contar autos que pasan frente a la escuela.

Aparte de ser números para contar y números cardinales, los números naturales también se pueden utilizar como números ordinales. Los números ordinales (primero, segundo, tercero, ...) indican posiciones. Los alumnos deberían ejercitar el uso de números ordinales para describir la posición de uno en una carrera como también la posición de un objeto en relación a otro.

En el tema de las mediciones, los números naturales se utilizan con una unidad estándar o no. Estos números se utilizan como números para medir. En otras situaciones que los alumnos puedan ya conocer, los números se utilizan como etiquetas (Ilustración 6-4). Los números que se utilizan para etiquetar o nombrar objetos se denominan números nominales.

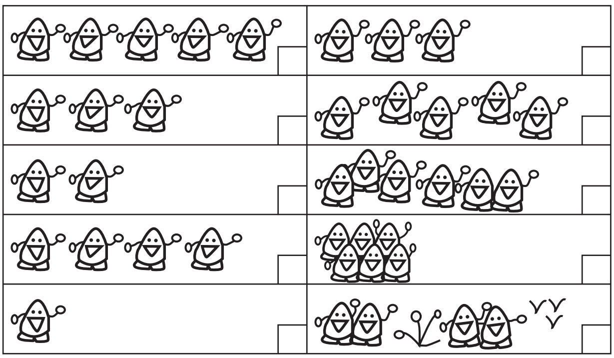


Ilustración 6-3 Contar monstruos

Fuente fotografía © 2006 Yeap Ban Har

Ilustración 6-4 Número nominal

En esta sección, vemos que los números naturales se utilizan de diferentes maneras. Se utilizan como números para contar, números cardinales, números ordinales, números para medir y números nominales.

Verschaffel y De Corte (1996) clasifican los usos de los números naturales en cinco categorías:

- Para cuantificar (aspecto cardinal)
- Para identificar (aspecto ordinal)
- Para medir (aspecto de medición)
- Para llevar cuentas (aspecto de memorización)
- Para nombrar (aspecto no numérico)

Actividad 1

Lea un artículo en un periódico.

Busque números para contar, números cardinales, números ordinales, números para medir y números nominales. ¿Hay algún otro número que no corresponda a ninguna de estas categorías?

Hacer participar a los alumnos

Considere este caso: Carlos no habla mucho en clases. Por lo general, necesita ayuda para completar sus tareas. Sin embargo, no tuvo problemas cuando, junto al profesor, completaron en clases la actividad del luche. Mientras saltaba de un cuadrado a otro, pudo contar hacia adelante y hacia atrás sin ningún esfuerzo. Carlos también se hizo cargo de organizar a sus amigos. Este mismo alumno, con frecuencia, parece indiferente en clases. ¿Cómo podemos lograr que este alumno participe?

La siguiente fase para el sistema de educación en Singapur es mejorar la calidad de la educación de cada alumno (Ministerio de Educación, 2005a, 2005b). En cuanto a los enfoques pedagógicos, se alienta a que las escuelas busquen enfoques que puedan hacer participar a todos los alumnos, especialmente a aquellos que no obtienen buenos resultados. El enfoque de Estrategias de Participación y Desarrollo Eficaz (SEED por su sigla en inglés), el que se instauró en todos los cursos de educación primaria en 2005, forma parte de esta gestión.

En la sección previa, vimos dos enfoques diferentes para ayudar a los alumnos a consolidar su capacidad de recitar números naturales en orden. Usar dos enfoques sirve para atender las necesidades de alumnos con diferentes habilidades. En el ejemplo de Carlos, vemos a un alumno que en las clases normales no participa mucho, pero que sí se beneficia de los diferentes enfoques que usa su profesor. Aquellos que son hábiles con ejercicios rítmicos y musicales tienden a disfrutar más las canciones infantiles. Aquellos que tiene más habilidades psicomotoras tienden a disfrutar más el juego del luche. Además, los alumnos que son más hábiles con las relaciones interpersonales tienden a disfrutar más las tareas, pues implica interactuar con los otros compañeros de clase.

Un principio clave para hacer participar a los alumnos es utilizar una variedad de tareas que les permita contribuir activamente. Se seleccionan diferentes tareas para atender a las necesidades de alumnos con diferentes habilidades. Aún más importante es que los alumnos tengan la oportunidad de desarrollar una variedad de capacidades.

La notación posicional

Considere este caso: Cuando a Beatriz se le preguntó el valor del dígito 3 en 315, no supo dar una respuesta. Ella cree que la respuesta es 3. ¿Qué hacemos cuando nos encontramos con una alumna como Beatriz?

Una vez que los alumnos se sientan cómodos con los números hasta el 20, se les debe alentar a que agrupen una gran cantidad de objetos en decenas. Hay que ayudarlos cuando pasan de contar en unidades a contar en decenas y unidades.

Hay muchas actividades que los profesores pueden utilizar para ayudar a los alumnos a entender que la posición en donde se encuentra un dígito tiene un valor. En la Ilustración 6-5, se incluye un conjunto de actividades para ayudar a los alumnos a aprender el concepto de notación posicional.

Utilice los bloques multibase para mostrar los números 315 y 153.

De a sus alumnos objetos y pídales que formen diferentes números con la ayuda de la tabla de notación posicional.

Centenas	**Decenas**	**Unidades**
○○○○○	○○○	○

Pídales que digan el número de centenas, decenas y unidades que aparecen.

Dé a los alumnos tres discos numerados con los dígitos 1, 3 y 5 y pídales que formen diferentes números con la ayuda de la tabla de notación posicional.

Centenas	Decenas	Unidades
5	3	1

Pídales que digan el número de centenas, decenas y unidades que aparecen.

Dé un dígito a tres alumnos; uno para cada uno (por ejemplo, 1, 3 y 5). Pídales que formen un número.

Ilustración 6-5 Actividades de notación posicional

En la primera actividad, se les dice los alumnos que el mismo dígito no indica el mismo valor en cada uno de los dos números. En 315, hay tres placas de centenas, mientras que en el 153 hay tres cubos de unidades. El tamaño relativo del material didáctico ayuda a los niños a comprender el concepto. En las dos actividades siguientes, se utiliza una tabla de notación posicional para demostrar que la posición en la que se encuentra un dígito determina su valor. En la segunda actividad, un disco representa 100 cuando se pone en la columna de las centenas, pero representa 10 cuando se pone en la columna de las decenas. Los profesores ayudan a sus alumnos a entender esto pidiéndoles que cuenten en centenas a medida que cuentan los discos en la columna de centenas, a que cuenten en decenas a medida que cuentan los discos en las decenas y, finalmente, a que cuenten las unidades a medida que cuentan los discos en la columna de las unidades. En las actividades tres y cuatro, los profesores pueden ayudar a los alumnos a ver que el valor que representa un dígito es diferente cuando cambia de posición.

En las primeras etapas del desarrollo de un concepto, con frecuencia se utilizan materiales didácticos. En tareas diseñadas de manera específica, los alumnos aprenden cuando utilizan los materiales didácticos para representar los conceptos de acuerdo con las indicaciones dadas por el profesor.

En la primera actividad, tanto el dígito como el valor del dígito se representan con los bloques multibase. Los tamaños relativos de las placas, barras y cubos muestran los valores relativos de las centenas, las decenas y las unidades. En la segunda actividad, el valor del dígito es abstracto, pero los dígitos se muestran mediante materiales proporcionados. En los materiales proporcionados, el 3 está representado por algo que es tres veces más grande que la cosa que representa al 1. En las actividades tres y cuatro, los dígitos están representados por materiales no proporcionados.

Suma y resta: hechos básicos

Considere este caso: Tres meses después de entrar a la escuela, Daniel, un alumno de primer año de educación básica, todavía utiliza los dedos para sumar. A pesar de que sus respuestas son correctas, no logra tan buenos resultados cuando se le pide que no use sus dedos. ¿Qué nos dice esto?

Cuando se aprende a sumar, las etapas iniciales implican el uso de materiales concretos para contar. Antes de la suma formal, se alienta a los alumnos a que conozcan las relaciones numéricas. Se les puede dar a los alumnos diez objetos y pedirles que los ordenen en dos grupos. De manera alternativa, se les puede pedir que dividan una columna de piezas de LEGO® en dos partes. Cada vez, se les pide que digan la cantidad de objetos en cada grupo o parte. Aprender sobre las relaciones numéricas prepara a los alumnos para el ejercicio de sumar formalmente. Luego, se pueden utilizar imágenes en vez de materiales concretos.

Ya sea con materiales concretos (incluidos los dedos) o imágenes, los alumnos comienzan por contar todo. Cuando se encuentran con el valor 6 + 2, los alumnos que cuentan todo contarán 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Después se espera que los alumnos progresen y comiencen a contar desde el número mayor. Los alumnos que son capaces de contar a partir de un número contarán 6, 7, 8 cuando se enfrentan a 6 + 2. Los alumnos que conocen la propiedad conmutativa de la suma (a + b = b + a) contarán desde 7 cuando se encuentre con el valor 3 + 7. Los alumnos que no conocen la propiedad conmutativa comenzarán a contar desde 3. Si se les da la oportunidad de consolidar sus conocimientos fundamentales de la suma, los alumnos podrán recordar la suma de dos números cualquiera de un dígito. Nos referimos a que todas las sumas desde 1 + 1 hasta 9 + 9 se pueden considerar como las relaciones numéricas fundamentales de la suma.

Los alumnos que logran recordar las relaciones numéricas de los números están capacitados para aprender la relación entre la suma y la resta. Se alienta a que vean un conjunto de frases numéricas relacionadas. A veces, estas se conocen como una familia de frases numéricas. En la Ilustración 6-6 se muestra una familia de frases numéricas.

$$6 + 5 = 11$$
$$5 + 6 = 11$$
$$11 - 5 = 6$$
$$11 - 6 = 5$$

Ilustración 6-6 Una familia de frases numéricas

Hay una variedad de maneras de ayudar a que los alumnos aprendan las relaciones numéricas fundamentales de la suma y la resta. A continuación, se describe un juego sencillo con naipes normales.

Ernesto, Francisca y Gabriel participan en un juego que se llama Saludos. Ernesto grita ¡'Saludos'! Francisca y Gabriel sacan una carta de un montón de cartas y ponen su carta en sus frentes para saludarse entre ellos. Cada uno puede ver la carta de los otros pero no la que tienen en su propia frente. Ernesto, que gritó ¡'Saludos'! antes, ahora anuncia la suma de los dos números que ve en la frente de sus amigos El objetivo del juego es que Francisca o Gabriel diga el número que tienen en su carta, que no pueden ver. Se toman turnos para que cada uno sea el que dice ¡'Saludos'!

Este juego se puede modificar para que los alumnos practiquen sus conocimientos sobre la resta, al tiempo que los alienta a recordar las relaciones numéricas de la suma y resta. Los alumnos que no los recuerdan, pueden utilizar las imágenes en las cartas como ayuda para encontrar la respuesta contando.

Suma y resta: números naturales mayores

Considere este caso: Isabel puede sumar números grandes. Sin embargo, a veces comete errores como 135 + 72 = 855 y 329 - 174 = 255. Es posible que Isabel haya aprendido a utilizar el algoritmo para sumar y restar números sin haber entendido los conceptos relacionados. En palabras de Skemp (1987), Isabel tiene los conocimientos instrumentales pero no los conocimientos relacionales.

En las ilustraciones 6-7 y 6-8 se muestra el modelo para la suma (135 + 52) y la resta (135 - 23) sin reserva. Se pueden utilizar los bloques multibase en lugar de los modelos de dos dimensiones. En el Anexo 6-1 se incluye un conjunto de los modelos de dos dimensiones multibase.

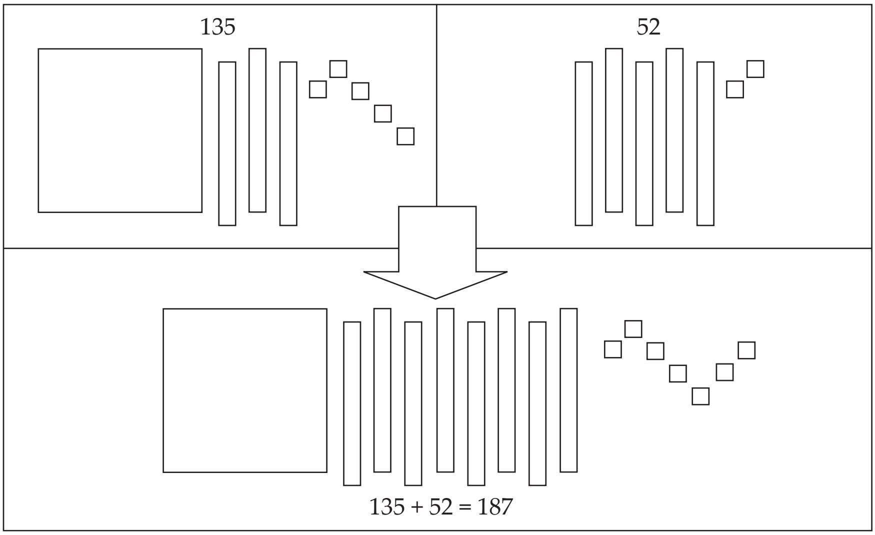


Ilustración 6-7 Modelos para sumas sin reserva.

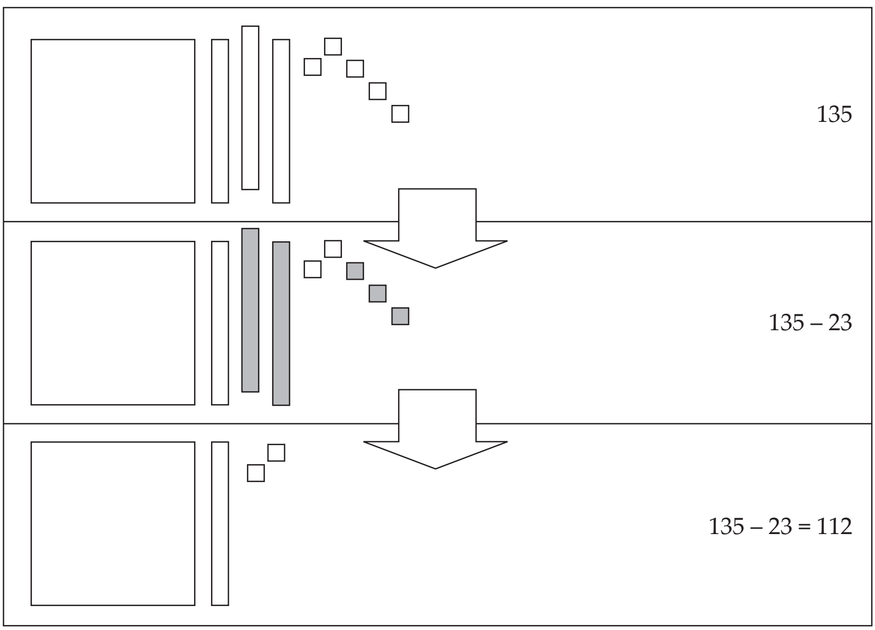
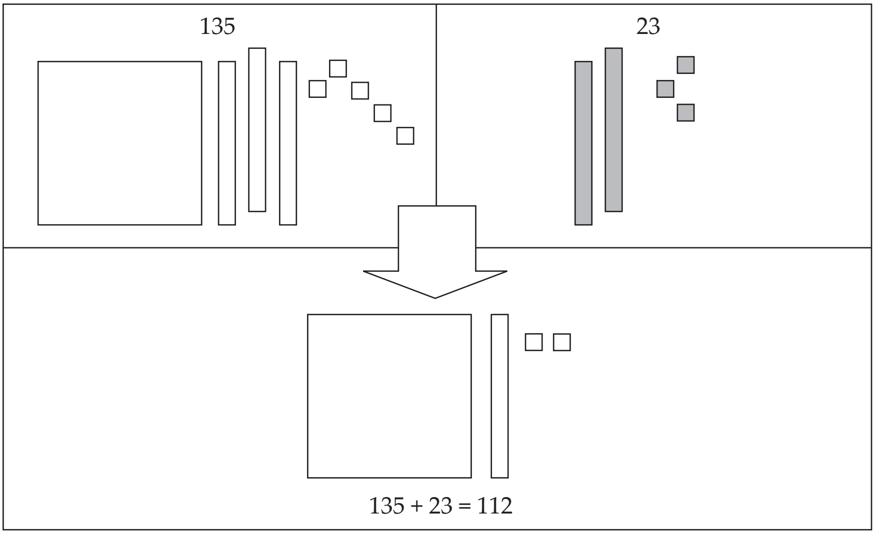


Ilustración 6-8 Modelos para restas sin reserva.

Actividad 2

Este es un modelo alternativo para restar.



Discuta cuál modelo es más apropiado para alumnos en enseñanza básica.

En las ilustraciones 6-9 y 6-10 se muestra el modelo para la suma (135 + 28) y la resta (135 - 53) con reserva . En la Ilustración 6-9, 10 unidades se vuelven a organizar como 1 decena. En la ilustración 6-10, 1 centena se vuelve a organizar como 10 decenas.

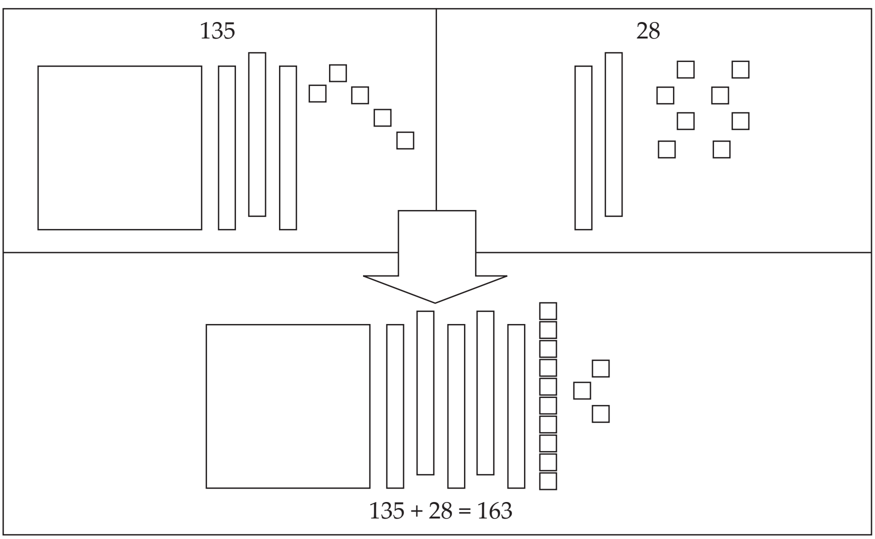


Ilustración 6-9 Modelos para sumas con reserva.

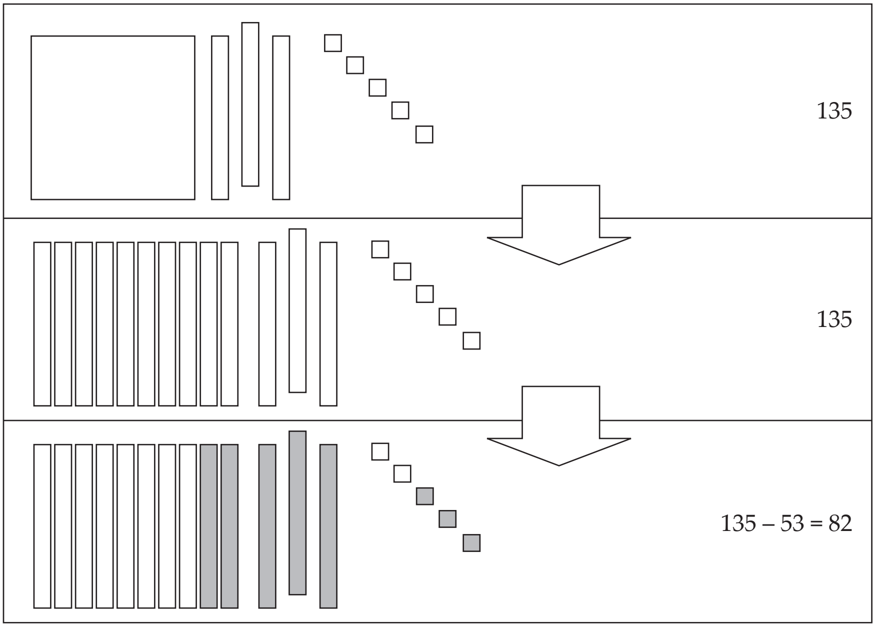


Ilustración 6-10 Modelos para restas con reserva.

Enseñanza eficaz de conceptos

Considere este caso: a Hernán no le va muy bien en la escuela. Por otro lado, Isabel parece saber hacer cálculos pero, al parecer, no entiende muy bien los algoritmos que usa.

Por enseñanza eficaz, entendemos que se incluye a todos los alumnos, incluso alumnos como Hernán, quienes deben ser capaces de lograr los objetivos aprendizaje. Asimismo, por eficaz también entendemos que los alumnos logran los objetivos de aprendizaje de manera significativa (es decir, los alumnos adquieren conocimientos relacionales además de los conocimientos instrumentales). Los alumnos como Isabel probablemente adquieren conocimientos instrumentales sin haber adquirido los conocimientos relacionales necesarios.

En el modelo de enseñanza y aprendizaje descrito en el Capítulo 3, el proceso de aprendizaje tiene tres fases. En la primera, los alumnos adquieren una comprensión de los conceptos. En la segunda, los alumnos consolidan su comprensión mediante una serie de tareas bien seleccionadas. En la tercera, los alumnos transfieren su comprensión a situaciones nuevas. En el transcurso de la enseñanza de los conceptos de la suma y la resta, la primera etapa se caracteriza por ser una presentación informal de la suma por medio del aprendizaje de relaciones numéricas. La etapa de comprensión también se ve dominada por una variedad de actividades que involucran el uso de materiales didácticos concretos y representaciones gráficas. Los símbolos se enseñan después. La etapa de consolidación brinda varias oportunidades para practicar. Se pueden utilizar una variedad de actividades. En la etapa de transferencia, los alumnos utilizan las relaciones numéricas de la suma para restar.

Durante la enseñanza eficaz de conceptos, se ponen en práctica tres principios. Primero, las ideas siempre se presentan de manera informal sin utilizar símbolos ni vocabulario formal. Esta es la idea de Diene de etapa de juego → etapa estructurada → etapa de práctica. En segundo lugar, se les da a los alumnos la oportunidad de interactuar con los objetos que representan los conceptos. Esta corresponde a la idea de Bruner de etapa concreta → etapa pictórica → etapa simbólica. En tercer lugar, se alienta a que los alumnos refinen y extiendan su comprensión al formar vínculos con los conceptos relacionados. Esta es la idea de Piaget del esquema de conocimientos. Un esquema más complejo permite que los alumnos transfieran lo que saben a nuevas situaciones. Con frecuencia, cuando los alumnos no logran los objetivos de aprendizaje, se debe a las siguientes razones: la enseñanza formal estructurada se lleva a cabo muy temprano en el proceso de aprendizaje, las representaciones simbólicas se utilizan sin representaciones concretas gráficas previas, y el tiempo que se dedica a las etapas que llevan a la etapa simbólica no es suficiente. A partir de esto se pueden sugerir posibles estrategias para las clases de recuperación. ¿Cómo estos tres principios pueden ayudar a los alumnos como Hernán e Isabel?

Actividad 3

Compare los dos conjuntos de tareas orientadas a que los alumnos practiquen la resta con reserva. ¿Cuál actividad es mejor?

Por la Srta. Jinny	**Por la Srta. Kong**
Busca el valor de	Busca el valor de
1. 543 – 276	1. 725 – 317
2. 634 – 397	2. 614 – 241
3. 214 – 177	3. 308 – 143
4.825 – 394	4. 576 – 299
5. 311 – 145	5. 291 – 36
6. 425 – 258	6.430 – 18

Incorporar la resolución de problemas

Para ayudar a los alumnos a consolidar habilidades tales como sumar y restar, se deben utilizar tareas de ejercitación. Una característica de una buena tarea ejercitación es otorgar oportunidades de ejercicios variados, más que de ejercicios repetitivos. Otra característica es el valor añadido de estas tareas. En la Ilustración 6-11 se muestran tareas en donde los alumnos practican una habilidad y resuelven problemas al mismo tiempo. Se les entrega a los alumnos un conjunto de fichas numéricas con los dígitos del 0 al 9. Se les pide que utilicen seis de estas fichas para mostrar una frase numérica de suma o resta.

Los alumnos pueden usar en el proceso la estrategia de adivinar una respuesta y verificarla. Otros pueden utilizar sus conocimientos de las relaciones numéricas para llegar a la solución. Observan su propio trabajo para revisar si sus respuestas satisfacen los requerimientos de la tarea. Es posible que otros exploren otras vías posibles, por sí solos o si el profesor se los pide.

El currículo de resolución de problemas se instauró en 1992. Este currículo, corregido y actualizado en 2001 y 2007, sigue adoptando una perspectiva de resolución de problemas. En este currículo, la resolución de problemas debería estar presente en todos los aspectos. Las tareas que se muestran en la Ilustración 6-10 ponen en evidencia cómo se puede llevar esto a cabo. Se puede alentar a los alumnos a que utilicen habilidades heurísticas para la resolución de problemas, tales como adivinar y verificar, aplicar sus conocimientos de relaciones numéricas y practicar buenos hábitos de razonamiento como, por ejemplo, monitorear el propio razonamiento y explorar posibilidades, incluso cuando hacen algo tan mundano como ejercicios repetitivos.

A continuación, se detallan dos ejemplos más de tareas en clases que incorporan ejercicios de resolución de problemas. En la Ilustración 6-12 se muestra el uso de una canción infantil orientada a que los niños practiquen las relaciones numéricas (Yeap,2002).

Suma y resta

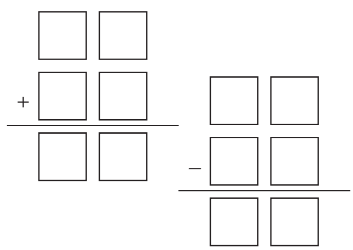


Ilustración 6-11a Tareas para practicar con elementos de resolución de problemas

Suma y resta

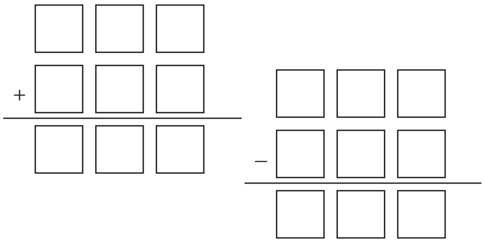
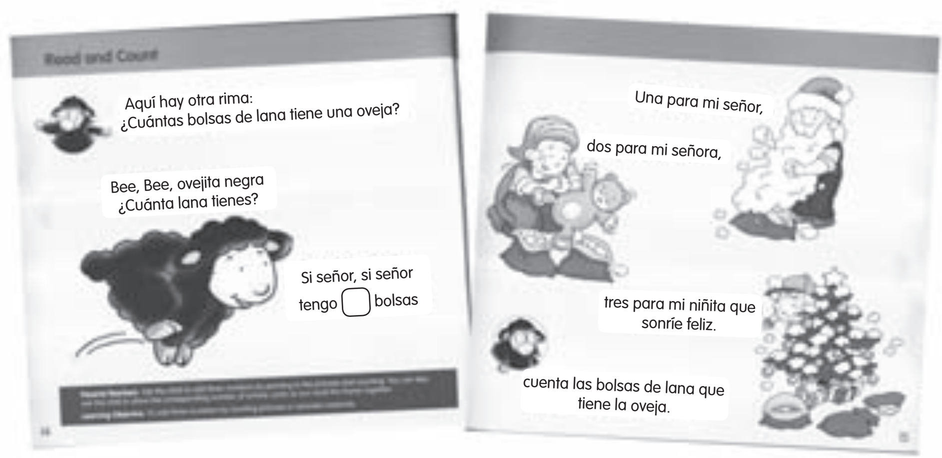


Ilustración 6-11b Una tarea más desafiante



Fuente: propiedad del autor

Ilustración 6-12 Baa Baa oveja negra

Los profesores pueden invitar a los alumnos a cantar esta canción infantil. Al momento de cantar, los alumnos pueden actuar la situación con la ayuda de bolsas pequeñas de lana o contadores. Luego de que los alumnos han resuelto el problema original, los profesores pueden proponer nuevos problemas a modo de brindar más oportunidades para que sus alumnos practiquen la resolución de problemas.

- Cambie la cantidad de bolsas de lana que el dueño, la señorita y la pequeña niña tienen.

Baa, baa, oveja negra
¿Tienes lana?
¡Sí, señor! ¡Sí, señor!
Tengo☐ *bolsas llenas.*
Cuatro para mi dueño,
Cinco para la señorita,
Nueve para la pequeña niña
Que sonríe feliz.

- Dé a los niños la cantidad total de bolsas y pídales que encuentren la incógnita.

Baa, baa, oveja negra
¿Tienes lana?
¡Sí, señor! ¡Sí, señor!
Tengo veinte bolsas llenas.
Diez para mi dueño,
Siete para la señorita,
☐ *para la pequeña niña*
Que sonríe feliz.

Baa, baa, oveja negra
¿Tienes lana?
¡Sí, señor! ¡Sí, señor!
Tengo veinte bolsas llenas.
Diez para mi dueño,
☐ *para la señorita,*
☐ *para la pequeña niña*
Que sonríe feliz.

En la Ilustración 6-13 se muestra cómo utilizar un acertijo para que los alumnos ejerciten las relaciones numéricas. Se les da a los alumnos fichas numéricas del 1 al 5 y se les pide que las pongan en cinco espacios para que la suma de los números en cada línea recta sea siempre la misma. Después, se les pide a los alumnos que utilicen diferentes conjuntos de números, números consecutivos y aquellos que no lo son.

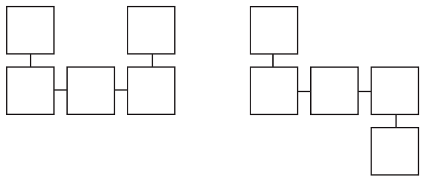


Ilustración 6-13 Acertijo

Suma y resta: problemas verbales

Una de las características que distinguen a los problemas que se resuelven en un paso es su estructura semántica. Para los problemas de enunciado que se pueden resolver con sumas o restas, hay tres estructuras semánticas básicas que se denominan Grupo (también conocido como parte-parte-todo o estructura combinada), Cambio y Comparación (Marshall, 1995).

En la Ilustración 6-14 se muestran ejemplos de problemas de enunciado con diferentes estructuras semánticas. El primer ejemplo es un problema con una estructura semántica de Grupo. En estos problemas, hay dos subconjuntos (galletas de vainilla y chocolate) o más que forman un conjunto (galletas). La incógnita puede ser el número de elementos en uno de los subconjuntos o el número de elementos en el conjunto (como en el ejemplo).

El segundo ejemplo es un problema con una estructura semántica de Cambio. En estos problemas, hay un valor inicial (las 623 galletas), un cambio que puede ser un aumento o disminución (las 572 galletas que regala) y un valor final. La incógnita puede ser el valor inicial, el cambio o el valor final (como en el ejemplo).

El tercer ejemplo es un problema con una estructura semántica de Comparación. En estos problemas, hay dos valores absolutos (las bolitas de Cristina y las de Carlos), que se comparan, y un valor relativo (49 bolitas más). La incógnita puede ser uno de los valores absolutos (como en el ejemplo) o el valor relativo.

Cristina preparó 315 galletas de chocolate. También preparó 59 galletas de vainilla. ¿Cuántas galletas preparó en total?	Grupo
Carlos tenía 623 galletas de chocolate. Regaló a su amigo 572 galletas. ¿Cuántas galletas tiene Carlos ahora?	Cambio
Cristina tiene 316 bolitas. Carlos tiene 49 bolitas más que Cristina. ¿Cuántas bolitas tiene Carlos?	Comparación

Ilustración 6-14 Estructuras semánticas para suma y resta

Actividad 4

Clasifique todos los problemas en el Anexo 6-2 de dos maneras diferentes. ¿Cuántos grupos diferentes hay en cada clasificación? Explique sus criterios de clasificación.

Multiplicación y división: hechos básicos

Considere este caso: A pesar de todos los intentos de su madre por hacer que Tania memorizara las tablas de multiplicar desde el jardín infantil, ella aún no las domina. Tania hora está en 5° año de educación básica. ¿Cómo podemos ayudarla?

En el currículo de Singapur, la multiplicación viene después de la suma de más de dos números de un dígito. La multiplicación se presenta como una suma repetitiva. En el primer año de educación básica, se espera que los alumnos sepan realizar multiplicaciones hasta 40 y no se espera que memoricen las tablas de multiplicar. En el segundo año, se espera que los alumnos sepan las tablas de multiplicar de 2, 3, 4, 5 y 10, y las memoricen. En el tercer año, aprenden el resto de las tablas de multiplicar. La capacidad de recordar las tablas de multiplicar se divide en tres partes principales. En la primera parte, se enfatiza el significado de la multiplicación, que se adquiere a partir del uso de materiales concretos y representaciones gráficas. En esta etapa, se utiliza el modelo de grupos equitativos y el modelo de matriz (vea la Ilustración 6-15). En la segunda parte, se enfatiza la memorización de las tablas de multiplicación para números más pequeños (2, 3 y 4) y número fáciles (5 y 10). En la tercera parte, la atención se centra en los números más grandes (6, 7, 8 y 9). Por medio de este enfoque en espiral, junto con la dedicación de tiempo suficiente para aprender bien las ideas, los alumnos pueden dominar las habilidades y conceptos. Algunos alumnos, como Tania, no han aprendido las tablas de multiplicar porque se les obligó a que las memorizaran antes de tiempo, cuando aún no estaban listos. Estas experiencias negativas de fracaso pueden haber afectado su autoestima en cuanto a las capacidades matemática que posee y la naturaleza de la matemática.

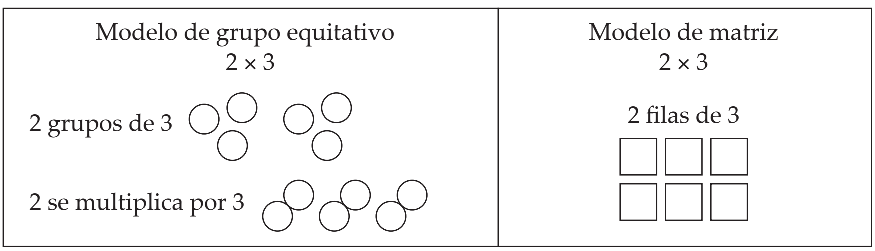
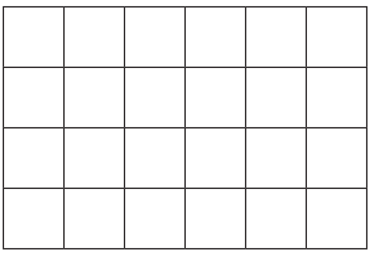


Ilustración 6-15 Modelos para la multiplicación

La división se enseña de la misma manera, con un enfoque en espiral. Sin usar símbolos, los alumnos aprenden que la división es poner elementos en conjuntos equitativos dependiendo del número de elementos en cada conjunto (división por agrupamiento) o dependiendo del número de conjuntos (división partitiva). Esto se lleva a cabo en el primer año de educación básica. En el segundo año, los alumnos realizan divisiones sin resto. En el tercer año, los alumnos realizan divisiones con resto. A pesar de que no se espera que reconozcan la relación que existe entre la multiplicación y la división en el primer año de educación básica, los alumnos sí comprenden esta relación a partir del segundo año. En el tercer año, se espera que los alumnos utilicen términos como producto, cociente y resto. En el cuarto año, los alumnos aprenden a utilizar los términos como factores y múltiplos.

Actividad 5

Escribe una familia de frases de multiplicación y división para $4 \times 7 = 28$.



4 filas, 6 fichas en una fila
$4 \times 6 = 24$

Ilustración 6-16 Una respuesta a la actividad de 24 fichas cuadradas

Factores y múltiplos

Considere este caso: En un curso de cuarto año de educación básica, el profesor Ramírez pide a sus alumnos que formen tantos rectángulos como sea posible con exactamente 24 fichas cuadradas. Para cada rectángulo que forma, María, una de las alumnas, anota el número de filas y el número de fichas en cada fila. En la Ilustración 6-16 se ve una de las respuestas de María.

El Sr. Ramírez luego escribe $\square \times \square = 24$ en la pizarra y pide a sus alumnos que digan dos números que den como producto 24. María dice 4 y 6. Luego, el profesor Ramírez le dice a la clase que estos dos números, que dan un producto de 24, se llaman factores de 24. A continuación, pide a sus alumnos que encuentren otros factores de 24.

En la actividad siguiente, los alumnos deben encontrar dos números que den como producto 36. El profesor Ramírez los alienta a que encuentren los factores sin tener que recurrir a las fichas numéricas.

Cuando están en cuarto año de educación básica, los alumnos ya han aprendido todos los conocimientos fundamentales de la multiplicación hasta 10 x 10. También han aprendido a utilizar la multiplicación para determinar el área de rectángulos y cuadrados. Por lo tanto, los alumnos pueden encontrar factores incluso si no han escuchado antes la palabra 'factor'. En la actividad que se describe, se les dio a los alumnos fichas numéricas. Las fichas son útiles porque convierten el proceso para encontrar factores en una serie de acciones que los alumnos pueden realizar. En las tareas posteriores, en donde no se entregan fichas numéricas, los alumnos pueden recurrir a esta actividad a fin de recordar los pasos a seguir para encontrar los factores. El profesor Ramírez también utilizó el término formal 'factores' solo después de que los alumnos habían terminado la tarea.

En otra clase, el profesor Ramírez utiliza preguntas para hacer que los alumnos encuentren múltiplos comunes.

Sr. Ramírez: ¿Cuánto es 1 x 3?
Alumnos: 3
Sr. Ramírez: ¿Cuánto es 2 x 3?
Alumnos: 6
Sr. Ramírez: ¿y cuánto es 3 x 3?
Alumnos: 9
Sr. Ramírez: ¿Cuál es el número siguiente en esta secuencia de números?
María: 12
Sr. Ramírez: ¿Los dos que siguen después?
Óliver: 15 y 18
Sr. Ramírez: Empecemos con 4. Todos anotan la secuencia numérica.
Alumnos: [anotan 4, 8, 12, 16, 20, ...]
Sr. Ramírez: Se obtienen los números 4, 8, 12, 16 y 20 al multiplicar 4 por 1, 2, 3, 4 y 5. Los números 4, 8, 12, 16 y 20 son múltiplos de 4. Son los primeros cinco múltiplos de 4. En la actividad anterior teníamos los seis primeros múltiplos de 3. ¿Pueden anotar los primeros cinco múltiplos de 6?
Alumnos: [anotan 6, 12, 18, 24, 30, ...]
Sr. Ramírez: ¿Qué número es un múltiplo de 3 y de 4 al mismo tiempo?
María: 12
Sr. Ramírez: Decimos que 12 es un múltiplo común de 3 y 4. ¿Hay otra respuesta?

Actividad 6

Analice este segmento de la clase a la luz de teorías pedagógicas para la enseñanza y el aprendizaje.

Multiplicación y división: números naturales mayores

Considere este caso: A Patricia le cuesta entender el Método 1 pero no tiene problemas con el Método 2. Sin embargo, su profesor insiste que debe usar el Método 1. Patricia le cuenta a su mamá que le tiene miedo a las multiplicaciones.

Método 1

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\,2} \\ 1074 \\ \times \quad 6 \\ \hline 6444 \end{array}$$

Método 2

$$\begin{array}{r} 1074 \\ \times \quad 6 \\ \hline 6000 \\ 420 \\ + \quad 24 \\ \hline 6444 \end{array}$$

En Singapur, los alumnos no usan calculadoras y todos los cálculos se hacen con el método de lápiz y papel o como cálculos mentales. Sin embargo, de acuerdo con la opinión del autor, los alumnos que ya están en los últimos años de la educación básica deberían utilizar calculadoras. Para la suma y la resta, los alumnos en tercer año de educación básica ya deberían haber tenido la experiencia de sumar y restar números de hasta 4 dígitos sin el uso de calculadoras. Para la multiplicación, los alumnos en cuarto año de educación básica ya deberían tener experiencia con la multiplicación de números de 3 dígitos por números de 2 dígitos y números de 4 dígitos por números de 1 dígito sin usar calculadoras. En el caso de la división, los alumnos en cuarto año ya deberían tener experiencia con la división de números de 4 dígitos por números de 1 dígito. En el caso de la multiplicación y división por decenas, centenas y millares, se espera que los alumnos puedan hacerlas sin tener que recurrir a una calculadora. Por lo tanto, el uso de una calculadora se debe limitar al cálculo de números grandes, en donde el cálculo mental es tedioso. Se espera que los alumnos desarrollen una comprensión conceptual tanto de la multiplicación como de la división. El uso de calculadoras debería facilitar una mejor comprensión conceptual, pues permite eliminar la labor tediosa de calcular.

En la Ilustración 6-17 se muestran varias estrategias que los profesores pueden utilizar para ayudar a los alumnos a realizar multiplicaciones, no solamente para dominar la labor de calcular, sino además para comprender la operación.

Tarea	Estrategia	Comentarios
1074 × 6	Encontrar productos parciales	Los alumnos deberían ser capaces de ver que 1074 = 1000 + 70 + 4. El producto se obtiene al sumar los productos parciales 6000, 420 y 24.
327 × 19	Compensar	Los alumnos deberían ser capaces de ver que 19 es 1 menos que 20. El producto se obtiene al restar 327 de 327 × 20
402 × 26		Los alumnos deberían ser capaces de ver que 402 es 2 más que 400. El producto se obtiene al sumar 52 a 400 × 26.

Ilustración 6-17 Estrategias de multiplicación

En la Ilustración 6-18 se muestra un método visual para ayudar a que los alumnos comprendan la multiplicación de números grandes. Una buena comprensión del proceso de multiplicación de números grandes brinda una base para la manipulación algebraica, como la expansión de expresiones: a (b + c) y (a + b)(c + d).

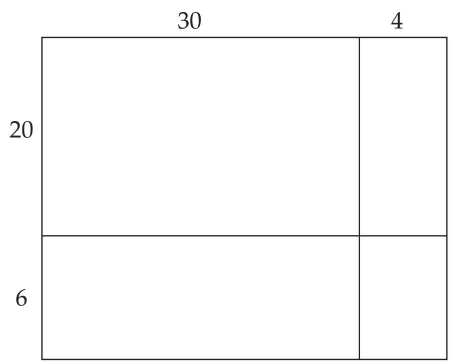


Ilustración 6-18 Un modelo visual para 34 × 26

Para las tareas de división como 42 ÷ 6, los alumnos pueden utilizar lo que saben acerca de la multiplicación: 6 x 7 = 42. Para las tareas de división de números más grandes como 72 ÷ 6, los alumnos pueden ver que 72 es 60 + 12. Como tal, la división puede considerarse como 60 ÷ 6 y 12 ÷ 6, que se pueden resolver de manera mental.

Para las tareas de división como 174 ÷ 5, hay que ayudar a los alumnos a ver que 174 es 150 + 20 + 4 o 50 + 50 + 20 + 4. Como tal, es útil saber que se pueden utilizar 150 ÷ 5 o 50 ÷ 5 y 20 ÷ 5 para dividir el número más grande.

Al explicar de manera concreta una división con resto, es importante poner atención a los materiales que se utilicen para ayudar a los alumnos a dividir de manera adecuada. La división 174 ÷ 5 se puede resolver y dar como resultado 34 con un resto de 4; 34,8; o $34\frac{4}{5}$. Al explicar la división de manera concreta, con el fin de que la respue

sta esté como la primera opción, los objetos deber ser elementos individuales para que los 4 elementos que sobran no se puedan seguir dividiendo en partes iguales.

Enseñar menos, aprender más

En Singapur, se alienta a las escuelas a que 'enseñen menos' para que los alumnos puedan 'aprender más' (Lee, 2004; Ministerio de Educación, 2005a, 2005b). Al enseñar la división, los profesores pueden lograr esta visión evitando enseñar el algoritmo de la división. En vez de eso, pueden usar el tiempo que dedican a enseñar y ejercitar el algoritmo de la división a hacer que los alumnos sean creativos al momento de descomponer un número para poder hacer cálculos mentales.

La idea de 'enseñar menos' se puede lograr evitando dar a los alumnos el método que podrían utilizar (en este caso, el algoritmo de la división), que es una extensión natural de sus conocimientos básicos (conocimientos fundamentales de la multiplicación y división por decenas, centenas y millares). Como resultado, los alumnos cuentan con oportunidad para poner en práctica su creatividad e ingenio al tratar de descomponer un número de manera tal que solo se deba recurrir a cálculos mentales básicos. En el proceso, los alumnos acumulan horas de práctica de estrategias mentales, lo que mejora la capacidad que tienen de visualizar cálculos. Los alumnos aprenden más cuando adquieren buenos hábitos mentales (ingenio y creación) y adquieren un dominio y capacidad que es primordial para el razonamiento matemático (visualizar).

Multiplicación y división: problemas de enunciado

Considere este caso: Karina y Rubén están tratando de resolver los siguientes problemas verbales de enunciado.

Un taxi puede llevar como máximo a 4 pasajeros.

Encuentra el número mínimo de taxis que se necesitan para llevar a 23 pasajeros.

Karina y Rubén anotan la división 23 ÷ 4. Karina da como resultado $5\frac{3}{4}$ de taxis. Rubén anota su solución como 6, porque 6 es el número natural más cercano a $5\frac{3}{4}$. La incapacidad de los alumnos de entender los cálculos que realizan para resolver el problema probablemente proviene del hecho de que se le concede más importancia al cálculo que a la explicación de la situación durante las clases. En la Ilustración 6-19 se muestra una serie de actividades para presentar problemas. En estas actividades, los alumnos anotan problemas de enunciado como ayuda para interpretar el significado de un resto en una tarea de división.

Escribe un problema de enunciado que se resuelva al dividir 200 ÷ 6 y la solución sea:

- 33
- 34
- $33\frac{1}{4}$
- 2

Ilustración 6-19 Actividades para presentar problemas

Existen dos tipos distintos de problemas de enunciado de división. En uno, se da el número de conjuntos. En el otro, se da el número de elementos en cada conjunto. En la Ilustración 6-20 se muestra un ejemplo de cada uno.

Se da el número de conjuntos	Se da el número de elementos en cada conjunto
Hay 12 dulces. 4 niños los comparten de manera equitativa. ¿Cuántos dulces recibe cada niño?	Hay 12 dulces. Cada niña recibe 4 dulces. ¿Cuántas niñas comparten los dulces?
Una cuerda mide 12 metros de largo. Se corta en 4 pedazos de igual largo. ¿Cuánto mide el largo de cada pedazo?	Una cuerda mide 12 metros de largo. Se corta en varios pedazos, cada uno de 4 m de largo. ¿Cuántos pedazos de cuerda hay?

Ilustración 6-20 Problemas de enunciado de división

Para los problemas de enunciado que se pueden resolver por medio de una multiplicación o división, hay varias estructuras semánticas que se denominan Grupos equitativos, Matriz/Área, Tasa y Combinación. En la ilustración 6-21 se explica cada una.

Estructura semántica	Multiplicación	División
Grupos equitativos	Hay 6 manzanas en cada bolsa. ¿Cuántas manzanas hay en 3 de estas bolsas?	Hay 18 manzanas repartidas en 3 bolsas. Cada bolsa tiene la misma cantidad de manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en una bolsa?

Estructura semántica	Multiplicación	División
Matriz/Área	Hay 6 filas de escritorios. Cada fila tiene 3 escritorios. Un rectángulo mide 6m de largo y 3m de ancho. Encuentra el área del rectángulo.	Se ordenan 18 escritorios en 6 filas iguales. ¿Cuántos escritorios hay en una fila? Un rectángulo con un área de 18 m2 tiene un largo de 6m. Encuentra el ancho en metros.
Tasa	Una polera de la escuela cuesta $6. ¿Cuánto cuestan 3 de esta poleras?	Una polera de la escuela cuesta $6. Una mamá paga $18 por algunas poleras de la escuela. ¿Cuántas poleras compró la mamá?
Combinación	Mi osito de peluche tiene 3 pantalones y 6 poleras. ¿De cuántas maneras diferentes puedo vestir a mi osito con sus pantalones y poleras?	

Ilustración 6-21 Estructuras semánticas de la multiplicación y división

Grandes ideas y números naturales

Con cada revisión que se hace al currículo de matemática de Singapur, se hace cada vez más evidente la importancia que se le da a instruir a una persona que razona. La integración de un currículo de resolución de problemas permite que los profesores experimenten y vayan dando sentido el área de la resolución de problemas, lo que en ese entonces era una idea nueva. En la revisión de 2001, se alienta a los profesores a enseñar explícitamente las habilidades de razonamiento y heurísticas. En los últimos años, al alero de la iniciativa llamada Innovación y Empresa (Innovation and Enterprise), se aliente también a que los profesores ayuden a sus alumnos a desarrollar hábitos mentales positivos.

Al hacer cálculos, los alumnos con hábitos mentales positivos pueden recurrir a métodos alternativos, los que quizás son más fáciles. Así pueden inventar sus propias estrategias. Asimismo, pueden buscar patrones y relaciones respecto a los cálculos que hacen. Es más probable que este tipo de alumno resuelva problemas correctamente.

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{R} \\ \times & & & 9 \\ \hline \mathrm{R} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \mathrm{A} \\ \hline \end{array}$$

Ilustración 6-22 Problema nuevo (Yeap, 2004)

El problema en la Ilustración 6-22 requiere que los alumnos tengan más que la aptitud para hacer cálculos. Pida a sus alumnos que investiguen la multiplicación de números de 4 dígitos por 9, con la ayuda de una calculadora. Después de que prueben diferentes multiplicaciones, los alumnos que buscan patrones y relaciones constantemente se darán cuenta de que el producto, con frecuencia, es un número de 5 dígitos. Por lo tanto, la L debe ser un dígito específico para que el producto siga siendo un número de 4 dígitos. Este es un ejemplo de los alumnos que han adquirido grandes ideas en el quehacer de la matemática.

Operaciones mixtas

Además del conocimiento relacional y de procedimiento, los alumnos pueden aprender acerca de los conocimientos convencionales de la matemática. Considere este caso: Silvia se pregunta por qué las operaciones entre paréntesis siempre se realizan primero y después se hace una multiplicación o división. ¿Hay alguna manera de explicar el razonamiento detrás de esto?

La profesora Torres tiene una manera interesante de presentar el tema de las operaciones combinadas. Da a sus alumnos una frase numérica: $2 + 4 \div 2 \times 3$. Luego les pide que la resuelvan y lleguen al resultado. Como es de esperar, los alumnos utilizan diferentes reglas para evaluar su valor, pues no se les han enseñado las reglas. Humberto obtiene como resultado 9 al realizar las operaciones de izquierda a derecha. Vicente obtiene 1 al realizar $2 + 4$ primero, luego 2×3 y por último la división. La profesora Torres utiliza las respuestas de Humberto y Vicente para debatir. Su objetivo principal es que los alumnos se den cuenta de que la misma frase numérica tiene valores diferentes porque se utilizan reglas diferentes. Una vez que los alumnos entienden el caos que esto provoca, la profesora obtiene la confirmación de que ya están listos para aprender las reglas que se han adoptado de manera convencional.

En una clase posterior, la profesora Torres da a sus alumnos cuatro dígitos: 1, 9, 6 y 5. Les pide que escriban frases numéricas con todos los dígitos y cualquiera de las operaciones, donde se incluye como máximo el uso de un par de paréntesis, de forma tal que cada una de las oraciones numéricas tenga como resultado un valor de 1 a 10. Por ejemplo, $6 + 5 - 9 - 1 = 1$ y $6 + 5 - 9 \times 1 = 2$. En esta actividad, los alumnos pueden practicar el razonamiento flexible al tiempo que hacen ejercicios repetitivos. Muchos de los valores son difíciles de obtener. Con esta misma actividad, la profesora Torres pudo dar ejercicios desafiantes a los estudiantes más hábiles y ayudar a los que más les cuesta entender las reglas.

Conclusión

En este capítulo se incluye la enseñanza de los números, de la notación posicional y de las cuatro operaciones. Al mismo tiempo, se alienta al lector a que vuelva a revisar algunas de las ideas que se explicaron en capítulos anteriores. Algunas partes de los capítulos están relacionadas con las iniciativas implementadas por el Ministerio de Educación, las que se orientan a lograr que todos los alumnos participen en el proceso de aprendizaje. Se tratan con brevedad los principios de la participación eficaz y aprendizaje. También se incluyen sugerencias respecto a las maneras de implementar un currículo de resolución de problemas y cómo impartir una clase con alumnos con diferentes niveles de capacidades.

Referencias

LEE, H. L. (2004). *Discurso en el Singapore National Day Rally de 2004*.

MARSHALL, S. R (1995). *Schemas in problem solving*. Nueva York: Cambridge University Press.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2005a). *Nurturing every child: Flexibility and diversity in Singapore schools*. Singapur: Ministerio de Educación.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2005b). *Touching hearts, engaging minds: Preparing our learners for life*. Singapur: Ministerio de Educación.

SKEMP, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum Associates.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1996). *Number and arithmetic*. En A. L. Bishop, K. Clements, C. Keitel & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 99-135). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

YEAP, B. H. (2002). *Maths with Baa Baa Black Sheep*. Singapur: Federal Publications.

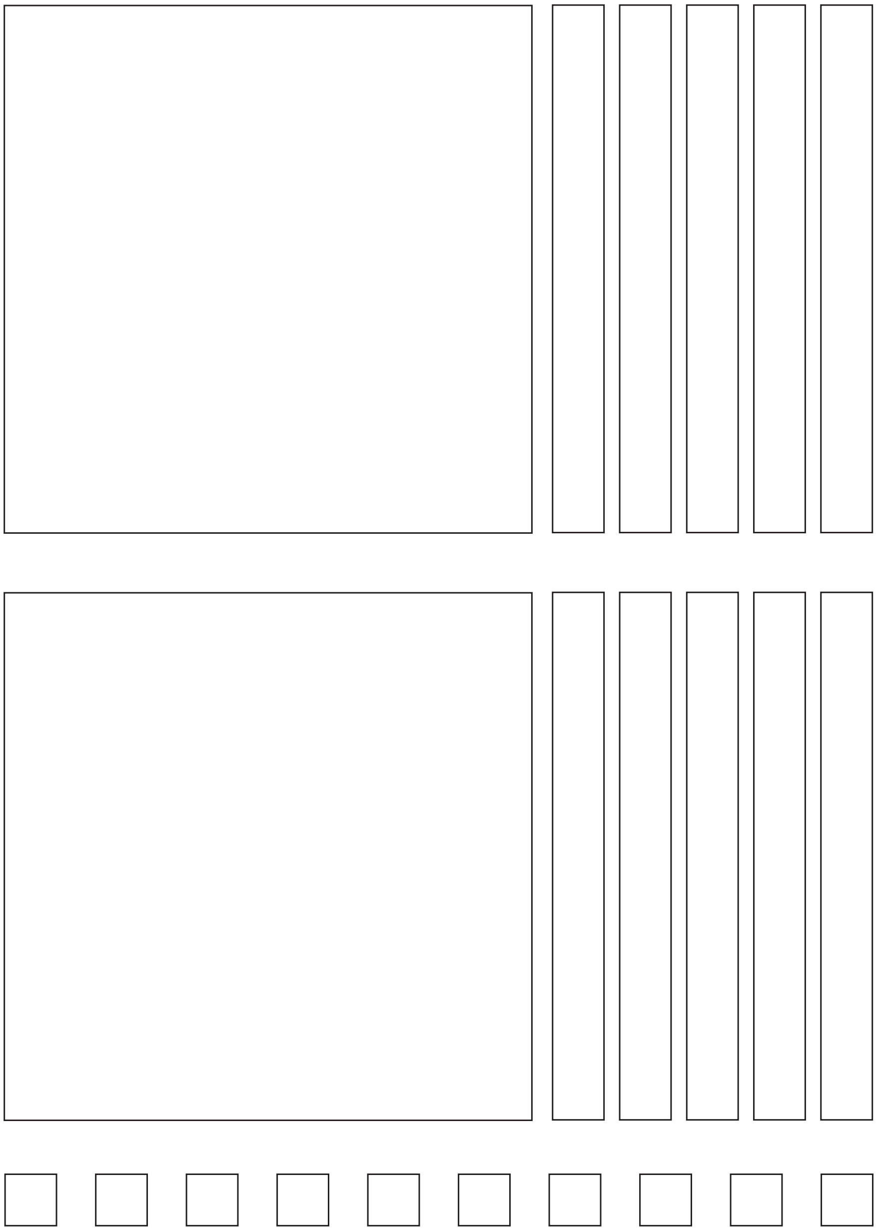
YEAP, B. H. (2004). *Problem-solving heuristics for PSLE Mathematics*. Singapore: EMS Publishers.

Fuentes de lectura complementaria

GRINSTEIN, L. S. & LIPSEY, S. I. (2001). *Encyclopedia of mathematics education*. Nueva York y Londres: RoutledgeFalmer.

Anexo 6-1

Modelos de dos dimensiones multibase



Anexo 6-2 Problemas verbales

Clasifique todos los problemas de enunciado (A a L) de dos maneras distintas. ¿Cuántos grupos diferentes hay en cada clasificación? Explique sus criterios de clasificación.

Problema A

Hay 2 tipos de guepardos en un zoológico. Hay 4 guepardos moteados y 3 guepardos rey. ¿Cuántos guepardos hay en total en el zoológico?

Problema B

A Juana le gusta mirar a los animales de granja en el zoológico. Contó la cantidad de ovejas y vacas. Hay 17 vacas. Hay 6 vacas menos que el total ovejas. ¿Cuántas ovejas hay?

Problema C

La mamá de Bárbara hizo dos tipos de pasteles para su cumpleaños. Algunos son pasteles con chocolate, otros son pasteles con mermelada. Hizo 45 pasteles con chocolate. Hizo en total 98 pasteles. ¿Cuántos pasteles de mermelada hizo?

Problema D

En el mes de junio, nacieron 12 bebés pingüinos en el Parque de Aves. Al final del mes, había en total 98 pingüinos en el Parque de Aves. ¿Cuántos pingüinos había al principio de junio?

Problema E

La mamá de María hizo 112 galletas para venderlas en una feria de diversiones. Cuando la feria terminó, le quedaron 15 galletas. ¿Cuántas galletas vendió la mamá de María?

Problema F

Daniel compró unos pasteles. Compró 4 pasteles de frutilla, 5 pasteles de chocolate y 3 pasteles de frambuesa. ¿Cuántos pasteles compró Daniel en total?

Problema G

En las avestruces el macho mide 220 cm de altura. La hembra mide 24 cm menos que un macho. ¿Cuánto mide el avestruz hembra?

Problema H

La mamá de Rita hizo 48 tartaletas de mermelada para los compañeros de curso de Rita. En su curso hay 39 alumnos. A cada uno le corresponde una tartaleta, ¿cuántas tartaletas sobran después de que cada alumno toma su tartaleta?

Problema I

Hay 12 cebras en el zoológico. Hay 5 caballos más que cebras. Hay 5 caballos menos que ciervos, ¿Cuántos ciervos hay en el zoológico?

Problema J

La mamá de Samuel compró un poco de harina. Utilizó 3 kg de harina para hacer una torta. Después de eso, le quedaron 4 kg de harina. ¿Cuántos kilogramos de harina compró?

Problema K

La mamá de Melisa compró 500 g de mantequilla y 875 g de harina para hacer una torta. ¿Cuánto más pesa la harina en comparación con la mantequilla?

Problema L

Después de que llegara un par de elefantes al zoológico, había 6 elefantes en total, ¿cuántos elefantes había en un principio en el zoológico?

Capítulo 7
La enseñanza de fracciones

Douglas Edge

Introducción a las fracciones

Las fracciones comunes, o simplemente fracciones, son un subconjunto de un grupo más extenso de números: los números racionales. Los números racionales toman distintas formas. En la educación básica se estudian algunas de estas formas junto a las fracciones, como los decimales, los porcentajes y las razones.

¿Cuándo es racional un número? Tal pregunta se puede responder preguntando: ¿Se puede escribir el número como $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$? ¿Es $\frac{1}{2}$ un número racional? ¿Es 0,5 un número racional? ¿Es 50% un número racional? La respuesta es sí a todas estas preguntas, dado que son o se pueden escribir como $\frac{a}{b}$: $\frac{1}{2}$ (tal cual), 0,5 (como $\frac{5}{10}$) y 50 % (como $\frac{5}{100}$). Se debe tener presente que la $\sqrt{2}$ no es racional, porque no se puede escribir en la forma $\frac{a}{b}$.

El uso corriente de las fracciones, por ejemplo $\frac{1}{2}$ de pizza y $\frac{1}{4}$ de hora, además de los requisitos de la matemática que se enseñan a nivel de educación media, recalcan el hecho de que sigue siendo importante aprender acerca de las fracciones. Sin embargo, en la actualidad se está presionando por reducir la importancia que se asigna a la enseñanza de las fracciones, debido quizás al uso de calculadoras y la unidad métrica.

Modelos seleccionados para enseñar el concepto de fracciones

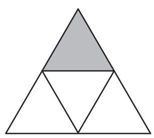
En Singapur, el estudio de las fracciones comunes comienza en el segundo año de la educación básica con la presentación de un significado o un modelo de fracciones (parte-todo). Después, se enseña, por ejemplo, la suma y resta de fracciones similares (también en 2° año). Luego, se enseñan las fracciones equivalentes (en 3° año) y así en adelante, hasta que con el tiempo se les enseña a los niños la división de una fracción por otra (en 6° año). Por lo tanto, a lo largo de la enseñanza básica se van presentando temas nuevos, lo que refleja el enfoque espiral del currículo. Consulte el Anexo 7-1 para más detalles.

Se utilizan distintos modelos para clasificar y representar fracciones. Por ejemplo, las fracciones se pueden ordenar como regiones o áreas, medición (o lineal), o modelos de conjuntos. Las fracciones también se pueden clasificar de acuerdo a su significado o interpretación: parte-todo, parte de un conjunto, entre otros. Esta clasificación también comprende la razón y el cociente. Existen otras fracciones que van más allá de estas interpretaciones, por ejemplo, las fracciones como exponente en donde $8^{\frac{1}{4}}$ significa $\sqrt[3]{8}$. En las escuelas de enseñanza básica de Singapur, por lo general incluimos las siguientes interpretaciones o modelos de fracciones: parte por el todo, parte de un conjunto, y fracción como división.

Parte-todo

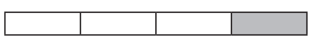
Esta interpretación, donde una unidad se divide por un número de partes iguales, se puede visualizar utilizando tanto el modelo de región como el de medición.

a) Pregunte: '¿Cuál es el área sombreada?'
(modelo de región: por ejemplo, hojas de papel o pizzas)



Un entero
Cuatro partes iguales
Una parte sombreada
Por lo tanto: $\frac{1}{4}$

b) Pregunte: '¿Cuál es la parte sombreada del modelo?'
(modelo de medición: por ejemplo, cintas o cuerdas)

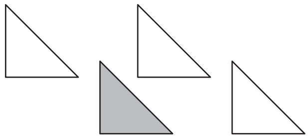


Un entero
Cuatro partes iguales
Una parte sombreada
Por lo tanto: $\frac{1}{4}$

Nota: i) Primero, ayude a los niños a entender lo que es una unidad.
ii) En segundo lugar, enfoque en *la diferencia entre las funciones del numerador y el denominador*: el numerador dice cuántas partes se encuentran sombreadas, mientras que el denominador dice en cuántas partes se divide el entero o cuántas partes hay en total.

El modelo de conjunto (o número discreto)

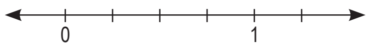
En esta interpretación de fracción, hay más de un objeto.
Pregunte: '¿Qué fracción del conjunto está sombreada?'



¿Cuál es la unidad?
¿Cuántas unidades hay?
¿Qué fracción de las unidades se encuentra sombreada?

La fracción como un número

Otra forma de ver una fracción es interpretarla como un número, en donde por lo general se trata de ubicar a las fracciones en la recta numérica. Por ejemplo, ¿dónde se ubica el número $\frac{1}{4}$? Pregunte:'¿En qué lugar de la recta se encuentra $\frac{1}{4}$?



¿Cuál es la unidad?
¿En cuántas partes se ha dividido cada unidad?
¿Dónde está el punto $\frac{1}{4}$?
Un consejo puede ser pedir a los alumnos que coloquen un dedo en el '0' y otro en '1'.
Esta 'unidad' debería ser bastante visible para los alumnos.

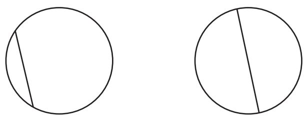
Cociente o fracción como división

Posiblemente, a partir de un modelo de región, se puede pedir a un alumno que divida algún número, digamos 8, en 4 partes iguales. Es decir, dividir 8 por 4. Es posible describir la situación pidiéndole al alumno que tome $\frac{1}{4}$ de 8. Esta misma información se puede mostrar como $8 \div 4$ o como $\frac{1}{4} \times 8$. En otras palabras, encontrar $\frac{1}{4}$ se puede entender cómo lo mismo que dividir un entero en 4 partes iguales. Es necesario tener presente que al momento de enseñar un método de división de fracciones por un número natural o de división de fracción por una fracción, esta interpretación de fracciones será la más útil.

Extender los conceptos de fracciones

Primeros pasos de la enseñanza

Como ocurre con la mayor parte de la buena enseñanza, es probable que comencemos ofreciendo a los niños situaciones de juego guiadas, donde las actividades que se lleven a cabo permitan el modelamiento del concepto. En el caso de que primero presentemos la idea de que el denominador representa las partes equitativas de un entero, se podría enseñar un concepto que incluya la *repartición equitativa*. Entre los objetivos se deberían incluir la adquisición de vocabulario nuevo, la presentación de materiales concretos y el uso de contextos adecuados. Por lo tanto, nos podemos preguntar: ‘En el primer círculo, si lo repartimos de forma equitativa, ¿importa qué parte me corresponde?’, ‘¿Es justo?’ o ‘¿Qué pasa con el segundo círculo?’ Una mitad significa que hemos hecho una repartición equitativa, por lo que deben ser partes iguales.



Aunque no es necesario que exista una jerarquía de materiales de enseñanza, los profesores usualmente utilizan una gama de materiales elegidos con la idea de que reflejen los modelos adecuados.

- Por lo general, comenzamos con los materiales que se encuentran disponibles en los entornos familiares de los alumnos (por ejemplo, fruta, pizza, cajas de huevo, tiras de papel o platos de cartón, entre otros). Con la ayuda de Microsoft Word, vea las instrucciones a continuación para pasos sobre cómo crear una tabla de fracciones.
- También existe una gama de materiales disponibles en el comercio, como las varas Cuisenaire, los discos de fracciones y las barras de fracciones.
- Durante los últimos años, se han estado incorporando las rectas numéricas a las clases, al igual que las hojas cuadriculadas y de gráficos.

Tabla de fracciones en Microsoft Word

Para hacer una tabla de fracciones en Microsoft Word, siga los siguientes pasos:

1) Clic:	Tabla
2) Clic:	Insertar tabla
3) Seleccione el número de filas (digamos):	14
4) Seleccione el número de columnas:	1
5) Clic:	Aceptar
6) Haga clic o destaque la quinta columna	
7) Clic:	Tabla
8) Clic:	Dividir celdas
9) Seleccione el número de columnas (digamos 2):	2
10) Continuar	

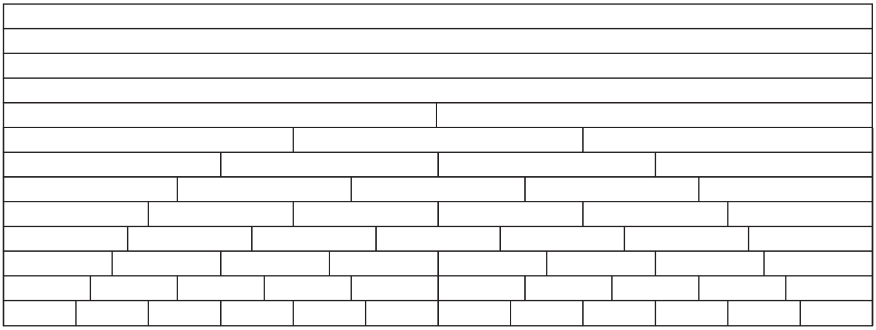


Ilustración 7-1 Tabla de fracciones

Consejo: deje las primeras tres a cuatro filas como unidades. Comience a dividir las celdas solo a partir de la fila 5. De esta manera, se pueden obtener de tres a cuatro enteros de unidades, lo que permite el modelamiento de las actividades con los números mixtos y las fracciones impropias. Además, sea selectivo, porque puede que no necesite todos los tamaños de fracciones entre 1 y 12.

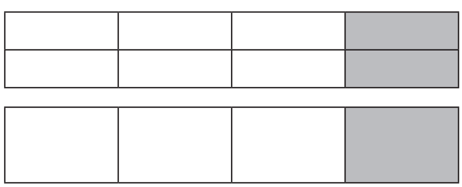
Expansión de los primeros conceptos

Como se mencionaba en el capítulo anterior, además de tener experiencia con factores y múltiplos, los niños necesitan otros conocimientos conceptuales antes de que comiencen a aprender los distintos algoritmos de fracciones. Estos conceptos también sirven de ayuda al momento de desarrollar la capacidad de estimar y realizar cálculos mentales con conceptos de fracciones.

Equivalencia

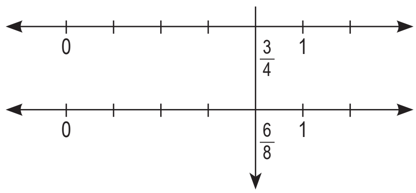
Se pueden utilizar los mismos modelos que se analizaron anteriormente para ilustrar la extensión de los conceptos de fracciones iniciales para la equivalencia de fracciones.

- Por ejemplo, con los modelos de área, suponiendo que se parte con dos regiones del mismo tamaño, se pide a los alumnos que comparen las partes sombreadas.



Las preguntas claves son: '¿En qué aspecto son similares las partes sombreadas?' [Las partes sombreadas de las áreas originales son las mismas], '¿Cómo difieren?' [La primera tiene ocho partes iguales con dos de ellas sombreadas, mientras que la segunda tiene cuatro partes, con solo una de ellas sombreada] y '¿Qué podemos concluir?' [Presente las ideas: 'mientras mayor sea la cifra del denominador, menores serán los pedazos', 'las cifras menores significan pedazos más grandes', entre otras.]

- También se puede utilizar el modelo de recta numérica para estudiar las fracciones equivalentes.



Nuevamente, las preguntas claves incluyen: '¿En qué aspecto son similares las rectas numéricas?', '¿Cómo difieren?, '¿En qué se parecen $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$?', '¿En qué difieren?', y '¿Qué podemos concluir?'.

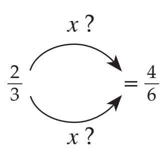
- Se puede pedir a los niños que realicen una tercera actividad de equivalencia, la comparación por división, que se puede hacer manualmente o con la ayuda de una calculadora. Los alumnos tienen que comparar los siguientes ejemplos.

$$\frac{1}{4} \text{ con } 4\overline{)1} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{8} \text{ con } 8\overline{)2}$$

  Nuevamente: ¿en qué se parecen y en qué difieren estos dos pares de preguntas?

Nota: en Singapur, por lo general se utilizan tres métodos a la hora de enseñar relaciones de equivalencia, dependiendo de la interpretación particular de la fracción que se tome en cuenta.

1) *Pensar en materiales didácticos*
   La equivalencia se puede determinar por investigación (es decir, por inducción) si se utilizan materiales didácticos o representaciones gráficas, como en cualquiera de los modelos anteriores (por ejemplo, los modelos de área o de recta numérica).
2) *Pensar en fracciones equivalentes*
   Hacer una lista de las fracciones equivalentes.



Se les pide a los niños que multipliquen tanto el numerador como el denominador por el mismo monto y, por lo tanto, obtienen una lista de las fracciones equivalentes.

Por ejemplo, las fracciones equivalentes de $\frac{2}{3}$ son $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$

3) *Pensar en la multiplicación*

Comparar la multiplicación y utilizar el conocimiento de los "nombres" del número 1.

$$\frac{2}{3} \times 1 = \frac{?}{6}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{?}{6}$$

¡En este caso, $\frac{2}{2}$ es un "nombre" apropiado para 1!

Nota: el cálculo de las fracciones equivalentes se aplica tanto a las fracciones propias como a las impropias.

Por ejemplo, $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ y $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$

Tenga presente que cuando se le pide a los niños que empiecen con una fracción como $\frac{4}{10}$ y que deduzcan su forma simplificada, $\frac{2}{5}$, la dirección correcta es pedir a los niños que 'simplifiquen', no que 'reduzcan' (no estamos achicando la fracción: el número fraccional es del mismo tamaño, pero en una forma más simplificada, y por ende diferente). Tampoco se debe utilizar la palabra 'cancelar'. Aun con expresiones tales como $\frac{3x}{6}$, la instrucción que se les da a los niños debería ser que 'simplifiquen'. Algunos alumnos, especialmente al entrar en la enseñanza media, si no entienden que simplificar realmente significa dividir el numerador y el denominador por el mismo factor, sufrirán lo que se denomina la 'cancelitis', lo que puede dar cabida a errores tales como los siguientes, donde los niños piensan que es correcto 'cancelar' por 3 o por 'x'.

Por ejemplo, $\frac{(3+x)}{(6+x)} = \frac{1}{2}$.

Tome en cuenta también que cuando se les pide a los niños que tornen una fracción impropia en el número mixto equivalente, no sería correcto pedirles que simplifiquen una fracción que ya se encuentra en su forma más simplificada (por ejemplo, $\frac{11}{3}$). Uno solo puede pedirles que la conviertan en un número mixto.

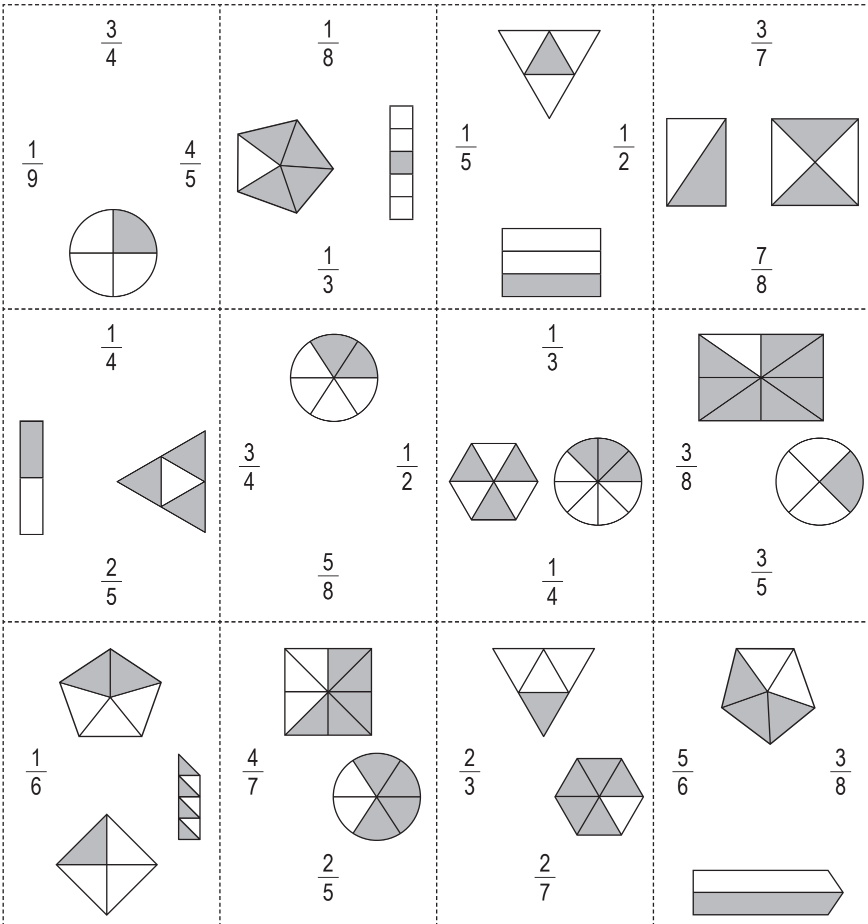
Actividad práctica 1

Vea la siguiente guía de ejercicios para hacerse una idea de cómo ayudar a sus alumnos a asociar una fracción equivalente a su contraparte gráfica. Pida a los niños que recorten 12 cuadrados y los vuelvan a ensamblar en un cuadrado de 4 x 3 al colocar las fracciones, o sus equivalentes, al lado de las imágenes correspondientes.

Una actividad para las fracciones equivalentes

Instrucciones:

1) Recortar los cuadrados.
2) Colocarlos juntos, para que los bordes con los números de fracción toquen los bordes que corresponden a las imágenes equivalentes.



*Fuente: cortesía de Koay Phong Lee

"Nombres" para el uno

Posiblemente, 'nombres para el uno' es una extensión del concepto de fracciones equivalentes. No obstante, el foco importante reside en que es necesario asegurarse de que los niños entiendan que el 1 puede ser nombrado de infinitas maneras, al igual que cualquier fracción (o con cualquier número natural). Además, elegimos la forma de acuerdo con su conveniencia: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, y $\frac{5}{5}$, y así consecutivamente, son todos nombres para el mismo número ('1'), y tienen el mismo valor.

Número intermedio o densidad de la recta numérica

Con la extensión del uso de la recta numérica desde números naturales a las fracciones, los niños deberían avanzar hacia el reconocimiento de que siempre, entre dos números, hay uno intermedio. Por lo tanto, entre 3 y 4, uno puede encontrar números tales como $\frac{31}{4}$, $\frac{31}{3}$ y $\frac{31}{2}$. Otro paso más difícil es reconocer que entre dos puntos asociados de fracciones cualesquiera, hay un número infinito de puntos. Claro está que, entre los puntos $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{5}$ la mayoría de los alumnos serán capaces indicar que $\frac{3}{5}$ se encuentra entremedio. La 'crisis', o 'estado de desequilibrio', para citar a Piaget, se puede provocar si se les pide a los alumnos que nombren algunas fracciones entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. Algunos niños piensan que tales números no existen. Otros, para demostrar su punto cambiarán ambas fracciones a un denominador de 10 e indicarán que $\frac{5}{10}$ se encuentra entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. Sin embargo, pedir a los niños que nombren al menos dos fracciones entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ puede ayudarles a expandir su forma de pensar. Tenga presenta que algunos niños pueden convertir las fracciones comunes en decimales para identificar correctamente las fracciones que se encuentran entremedio. Aunque se puede esperar que los niños utilicen solo fracciones comunes, tal estrategia puede ser buena porque promueve otros aspectos del sentido numérico.

Orden

Una vez que comprenden las nociones de equivalencia y número intermedio, no debería ser muy difícil para los alumnos ordenar los conjuntos de fracciones en orden de magnitud descendente o ascendente. Por lo general, los niños pueden organizar fracciones sin tener que entender la idea de 'unidad'. Ellos pueden decir que $\frac{1}{2}$ es más grande que $\frac{1}{3}$ sin reconocer que es verdad solo cuando se comparan unidades del mismo tamaño.

Por ejemplo, se les puede preguntar: '¿Qué es más grande, $\frac{1}{2}$ pelota de golf o un $\frac{1}{3}$ de pelota de fútbol?' Tenga presente que los niños también se pueden confundir con las preguntas que se formulan de la siguiente manera: '¿Cuál es mayor, $\frac{7}{9}$ o $\frac{5}{6}$?' Para algunos, es 'obvio' que $\frac{7}{9}$ es más grande porque '7 y 9 son más grandes que 5 y 6'.

Actividad de práctica 2

La actividad de práctica 2 constituye una oportunidad para promover las nociones de estimación que se enfocan en los puntos de referencia. Por ejemplo, ¿qué vuelve el valor de una fracción cercano a 0? ¿Cercano a $\frac{1}{2}$? ¿Cercano a 1? Centrarse en puntos de referencia permite discutir si los resultados son sensatos o posibles, y conversar acerca de la estimación y los conceptos tales como la densidad de la recta numérica. Tenga presente que comparar fracciones con respecto a $\frac{1}{2}$ es un componente de los temas de fracciones que se enseña en el tercer año de educación básica.

Una actividad para puntos de referencia de fracciones

¡Puntos de referencia de fracciones!

Utilice estos números para crear fracciones. Utilice un número como numerador y otro número como denominador:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. Escriba once fracciones que sean mayores que 0 pero menores que $\frac{1}{2}$.
2. Escriba ocho fracciones mayores que $\frac{1}{2}$, pero menores que 1.

Actividad de práctica 3

En la actividad de práctica 3, se les pide a los niños que creen fracciones que se encuentren entre las fracciones dadas. Puede ser necesario que los niños distingan entre un punto medio entre dos fracciones y cualquier otro número infinito de puntos.

Fracciones entre fracciones

Escribir fracciones

1. Encontrar la fracción que está a medio camino entre $\frac{2}{7}$ y $\frac{4}{7}$.
   Escriba otra fracción que esté entre $\frac{2}{7}$ y $\frac{4}{7}$.
   Explicar cómo se sabe que la fracción está entre $\frac{2}{7}$ y $\frac{4}{7}$.
2. Encontrar la fracción que está a medio camino entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$.
   Explicar cómo se sabe que la fracción está entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$.
   Escribir otra fracción que esté entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$.
3. Encontrar las fracciones que están entre los siguientes pares de fracciones:

   a) $\frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{12}$ c) $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{6}$ y $\frac{5}{8}$ e) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{8}$

Conceptos de sentido numérico fraccionario

Al igual que con el sentido numérico en general, es clave contar con un sentido numérico fraccionario. Consideremos la siguiente actividad de práctica.

Actividad de práctica 4

La actividad práctica 4, que consta de rompecabezas de fracciones con bloques, es una actividad interesante que requiere un manejo del sentido numérico fraccionario. Ésta actividad ayuda a reforzar los conceptos de fracción, como por ejemplo, la unidad de fracción, la equivalencia, la estimación y los puntos de referencia fraccionarios, tales como 0, $\frac{1}{2}$ y 1. Por medio del uso de bloques y limitando el uso por parte de los alumnos de los bloques rojo (trapecio), azul (rombo), verde (triángulo) y amarillo (hexágono), se les pide a los niños que creen varias formas geométricas de acuerdo con varios requerimientos fraccionarios, tales como un hexágono que es $\frac{2}{3}$ azul y $\frac{1}{3}$ rojo. Una parte importante de la actividad es asignar el valor de 1 a una pieza, por lo general el hexágono amarillo, y luego determinar los valores relativos de los otros bloques.

Rompecabezas de fracciones utilizando bloques

Rompecabezas de fracciones con bloques

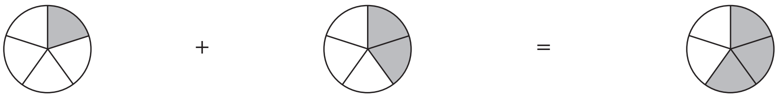
1. Construir un triángulo que sea $\frac{1}{3}$ verde y $\frac{2}{3}$ rojo.
2. Construir un triángulo que sea $\frac{2}{3}$ rojo, $\frac{1}{9}$ verde y $\frac{2}{9}$ azul.
3. Construir un paralelogramo que sea $\frac{3}{4}$ azul y $\frac{1}{4}$ verde.
4. Construir un paralelogramo que sea $\frac{2}{3}$ azul y $\frac{1}{3}$ verde.
5. Construir un trapecio que sea $\frac{1}{2}$ rojo y $\frac{1}{2}$ azul.

Los algoritmos fraccionarios

Suma y resta

Para fracciones con denominadores comunes, se debe comenzar con materiales didácticos para destacar el significado de las diferentes partes de la frase numérica. Por ejemplo, con $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$=?, comience preguntando qué pieza del juego representa $\frac{1}{5}$ y destaque las características de la pieza, es decir, que su color es amarillo. Luego, para sumar $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{5}$ requiere que tomemos dos amarillos más otro amarillo, lo que significa sumar dos quintos a un quinto.

Luego de la etapa concreta, utilice una imagen para repetir el mismo proceso. Tome en cuenta la progresión de concreto a pictórico a varias formas de abstracción (de palabras a símbolos).



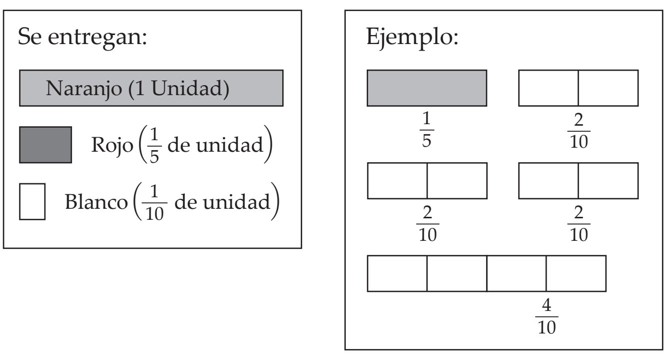
1 "sección amarilla"	más	2 "secciones amarillas"	es igual	3 "secciones a amarillas"
1 quinto	+	2 quintos	=	3 quintos
$\frac{1}{5}$	+	$\frac{2}{5}$	=	$\frac{3}{5}$

Nota: también, al mismo tiempo, es más probable que haya que tratar el error común, donde los niños sencillamente suman los numeradores y los denominadores de forma separada y escriben $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$. Si se explica por medio de la suma de piezas similares, 1 pieza amarilla más 2 piezas amarillas son 3 piezas amarillas, se puede ayudar a remediar esta dificultad.

Denominadores relacionados y diferentes

A la hora de estudiar ejemplos de suma y resta sin denominadores comunes, el foco debe pasar a la idea de que las piezas o partes que se suman no son del mismo tamaño. Si está utilizando materiales donde las piezas que representan las fracciones no son del mismo color, entonces puede enfocar las preguntas hacia las dificultades relacionada con la suma de piezas de diferentes colores.

En el ejemplo a continuación, analice los problemas asociados con sumar 1 rojo con 2 blancos. En última instancia, los niños tienen que ver que sería más fácil primero pasar de rojo (la pieza más grande) a las blancas (las piezas de tamaño mediano).



Lo anterior significa que en $\frac{1}{5} + \frac{2}{10}$, sería mucho más fácil cambiar la pieza roja (el quinto) por el equivalente en blanco de su longitud (dos decenas), puesto que nos permitiría sumar blancos con blancos, o dos decenas a dos decenas más.

Con ejemplos tales como $\frac{5}{6} \pm \frac{3}{4}$, donde los denominadores no guardan relación, ambas fracciones se deben cambiar para obtener fracciones que tengan igual número de partes del mismo tamaño. En consecuencia, se debería preparar un conjunto paralelo de preguntas que se enfoque en los materiales didácticos, con los cuales se les pregunta a los niños qué pieza (¿qué color?) se puede utilizar para cambiar ambas fracciones al mismo color.

Por ejemplo, si se utilizan los discos de fracciones, puede ser difícil sumar 'café' ($\frac{5}{6}$ de una unidad) más 'azul' ($\frac{3}{4}$ de la misma unidad), pero si ambos cambian a verde, que los volvería, por decirlo de alguna manera, diez 'verdes' más nueve 'verdes' (por ende, $\frac{10}{12}$ y $\frac{9}{12}$ de una unidad), entonces el ejemplo se vuelve más sencillo.

La dificultad al elegir el color correcto es un buen paralelo, y una buena metáfora, para la dificulta que implica elegir correctamente el denominador correcto. Por lo general ahora se requerirá un tiempo considerable de práctica con sumas y restas, tanto con fracciones propias e impropias como con números mixtos.

Nota: al momento de trabajar con la resta de números mixtos, hay distintos algoritmos útiles. Sin embargo, en Singapur, se espera que los niños resten tales números de la siguiente manera.

$\frac{31}{6} - 1\frac{5}{9} = \frac{21}{6} - \frac{5}{9}$ (restar el número natural primero)

$= 2\frac{3}{18} - \frac{10}{18}$ (cambiar a un denominador común)

$= \frac{121}{18} - \frac{10}{18}$ (reagrupar/intercambiar si es necesario)

y así consecutivamente.

Multiplicación

Los algoritmos de suma y resta de fracciones son relativamente sencillos en términos conceptuales, pero a muchos alumnos les cuesta dominarlos. Con la multiplicación, ocurre lo contrario. En términos conceptuales, la multiplicación de fracciones presenta varios desafíos, pero el algoritmo de 'primero multiplicar los numeradores y luego los denominadores' es casi automático.

El primer desafío conceptual de la multiplicación es confrontarse con la idea de que la multiplicación 'agranda el resultado final'. De hecho, con las fracciones (propias), 'la multiplicación lo vuelve más pequeño'.

El segundo desafío se refiere al uso de la palabra 'de'. Los niños tienen que asociar, por ejemplo, $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{3}{4}$ con $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$. A los alumnos les puede ser útil que se les recuerde, incluso desde el primer año de enseñanza básica, que 'de' se asocia con la multiplicación, como en el ejemplo '2 grupos de 3', lo que en última instancia se entiende como 2 x 3.

Por lo general, los profesores utilizan modelos de área con papel plegado para ilustrar la multiplicación de fracciones. Para ilustrar el ejemplo anterior, $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{3}{4} = ?$, primero se debe recalcar que tenemos un pedazo de papel: la unidad. El segundo paso es doblar el papel en cuartos, y luego pintar 3 de estas partes. Así se muestra $\frac{3}{4}$ de la unidad.

El siguiente paso consiste en doblar el papel por sus otros ejes en mitades, lo que indica que no necesitamos $\frac{3}{4}$ del papel, sino la mitad. Luego de doblar el papel, pregunte: '¿En cuántas partes del mismo tamaño hemos partido la unidad original?', '¿De qué tamaño es la fracción?' [¡octavos!] y '¿Cuántos $\frac{1}{8}$ existen en $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = ?$'.

Por lo tanto, podemos ver que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ se puede escribir como $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Luego de completar los distintos ejemplos con los niños, se les puede pedir que propongan un algoritmo apropiado, y deberían sugerir que $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = ?$ se puede reescribir como $\frac{(1 \times 3)}{(2 \times 4)} = ?$ Hay que considerar que el proceso de 'determinar la regla' es otro ejemplo para fomentar y usar el razonamiento inductivo.

División

La división por lo general se puede concebir de dos maneras: como una situación donde se comparte (lo que se conoce como partición) o como una situación donde se substrae (lo que a veces se llama medición). En una situación de partición, se podría comenzar con $36 \div 9 = 4$, y como ejemplo, se podría decir que quiero compartir 36 objetos con 9 personas. Por lo tanto, si se distribuyen de igual forma entre 9 personas, cada una obtiene 4 objetos. En la situación de sustracción, se puede comenzar con 36 objetos, pero esta vez cada persona recibe 9 objetos (por lo tanto, se sigue restando 9 hasta que ya no quede más). Hay que tener presente que en el último caso, tal como sabemos que multiplicar se puede entender como sumar repetidamente, también podemos considerar que dividir es similar a restar repetidamente.

Cuando se dividen fracciones, es útil utilizar un escenario de partición al momento de dividir una fracción por un número natural y un escenario de resta a la hora de dividir un número natural o una fracción por una fracción propia. Analicemos un escenario a la vez.

Dividir una fracción por un número natural

Consideremos $\frac{1}{2} \div 4$. Para comenzar, podemos recordar a los alumnos que $1 \div 2$ se puede escribir como $\frac{1}{2}$ o 1 dividido en dos partes iguales. Por lo tanto, $\frac{1}{2} \div 4$ significa que $\frac{1}{2}$ se divide en 4 partes iguales.

En términos conceptuales, este ejemplo significa que tenemos la mitad de una unidad que se debe compartir de forma equitativa entre cuatro personas. En primer lugar, debemos recordar a los alumnos que se comienza con una unidad, la que se define como uno, y luego tenemos que seleccionar $\frac{1}{2}$ de esa unidad.

- Para explicar, comience con una unidad de algún material.
- Modele $\frac{1}{2}$ de la unidad.
- Divida $\frac{1}{2}$ en 4 partes iguales.

Cada parte es de $\frac{1}{8}$ de la unidad original.

Luego de que hayan hecho varios ejercicios similares, se les puede pedir a los niños que ideen un algoritmo adecuado, y que tal vez vean por sí mismos la relación entre dividir por 4 y multiplicar por $\frac{1}{4}$. Esto significa que $\frac{1}{2} \div 4$ es equivalente a $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2} \div 4$ y $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{2}$ son expresiones equivalentes. Nuevamente, en esta parte se sugiere enseñar la ‘regla’ por inducción[1], al igual que la importancia de establecer el concepto de fracción como división, lo que se aconsejó anteriormente.

También es útil revisar las ideas de estimación en este contexto. En el ejemplo $\frac{2}{3} \div 4$, puede ser bueno preguntar a los niños si la respuesta sería mayor o menor que 4 (¿por qué sí o por qué no?) o mayor o menor que $\frac{2}{3}$ (nuevamente, ¿por qué sí o por qué no?) [Comenzamos solo con $\frac{2}{3}$ de una unidad. Si se sigue dividiendo quiere decir que cada persona tiene que terminar con algo menor a $\frac{2}{3}$.]

Dividir una fracción o un número natural por una fracción

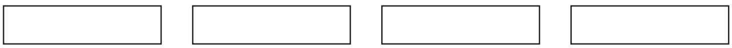
---

[1] En Singapur, a nivel de educación básica, no se presenta a los alumnos el término "recíproco".

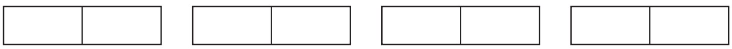
Ahora, consideremos $4 \div \frac{1}{2}$. Conceptualmente, por decirlo de alguna forma, comenzamos con 4 objetos (por ejemplo, 4 pizzas). Luego comenzamos restando $\frac{1}{2}$ al objeto (por ejemplo, la mitad de una pizza), hasta que ya no haya más. En este caso, podemos restar $\frac{1}{2}$ ocho veces.

De igual forma, con el ejemplo de $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, podemos esperar que la respuesta sea mayor a 1, porque si comenzamos con $\frac{3}{4}$ de una unidad, entonces podemos esperar que se restará $\frac{1}{2}$ una vez, pero no queda lo suficiente para restar una segunda. Los niños más hábiles, en esta etapa, reconocen que la respuesta será $1\frac{1}{2}$, es decir, resta de uno y un medio de $\frac{1}{2}$).

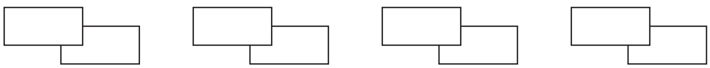
Para ilustrar el ejemplo de $4 \div \frac{1}{2}$, comencemos con 4 unidades.



Dividimos cada unidad en $\frac{1}{2}$ de la unidad.



Encontramos el número total de pedazos.



Como resultado se obtienen ocho mitades.

Por lo tanto, podemos ver que $4 \div \frac{1}{2} = 8$ (por lo tanto, podemos restar $\frac{1}{2}$ de 4 ocho veces). Podemos ver también que '2 pedazos por unidad x 4 unidades da como resultado 8 pedazos', o 2 x 4 = 8. Nuevamente, podemos ver la relación de equivalencia entre la división ($4 \div \frac{1}{2}$) y la multiplicación (2 x 4).

Aunque existen muchas formas de ilustrar la regla de la 'relación entre la división y la multiplicación' para dividir fracciones, el método que se sugiere aquí es el de inducción. Se debe comenzar con las representaciones concretas de varias formas, luego se debe continuar con la reflexión y el patrón de reconocimiento, y al final los niños, es de esperar, habrán comprendido y dominado en parte un procedimiento útil.

Actividad de práctica 5

La actividad práctica 5 ha sido diseñada para alentar la experimentación con ideas fraccionarias que implica hacer estimaciones, uso de puntos de referencia, noción de unidad y práctica con los distintos algoritmos operacionales. Por supuesto, las instrucciones se pueden modificar a fin de que se adecuen a la clase o a los alumnos específicos de la clase.

Crear ejemplos de fracciones adecuados

¡Acción fracción!

1. Colocar los números 1, 2, 3 y 4 en los recuadros para encontrar la respuesta más pequeña. Utilizar cada número solo una vez.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \qquad \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} =$$

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \qquad \frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} =$$

Errores comunes

La idea de que los niños cometen errores típicos y predecibles no es nueva. Aunque son varias las razones que subyacen por lo general, las dificultades experimentadas por los niños son de dos tipos: interferencia de algún algoritmo de número natural que ya conocen, y conceptos errados, lo que da como resultado la creación o adaptación inadecuada de algoritmos. Estas dificultades se pueden asociar, en primera instancia, con no comprender algunos de los significados de las fracciones, no reconocer las distintas funciones que cumple el numerador y el denominador o sumar numeradores y denominadores, tales como en la ilustración ya mencionada: $\frac{1}{5} + \frac{2}{10} = \frac{3}{15}$.

Se entregan dos ilustraciones de errores en las actividades de práctica 6 y 7. En cada caso, se deben estudiar cuidadosamente los ejemplos entregados. Se debe preguntar si el alumno ha cometido un error de manera permanente (por ejemplo, el alumno ha aplicado constantemente un patrón incorrecto). Luego reflexione acerca del proceso de razonamiento que se necesita para la tarea y el proceso de razonamiento que muestra el alumno. ¿Por qué pudo haber cometido tal error?

2. Colocar los números 1, 2, 4, y 8 en los recuadros para encontrar la respuesta más pequeña. Utiliza cada número solo una vez.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \qquad \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} =$$

3. Colocar los números 2, 3, 4 y 12 en los recuadros para encontrar la respuesta más pequeña. Utilizar cada número solo una vez.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \qquad \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} =$$

4. Colocar los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 en los recuadros para encontrar la respuesta más pequeña. Utilizar cada número solo una vez.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} =$$

Desde un punto de vista crítico, es necesario preguntarse cuáles pueden ser algunas de las estrategias correctivas para los escenarios que esté considerando. Por ejemplo, considere preguntarse si se debe:

- volver a enseñar el algoritmo estándar con un énfasis en los conceptos concreto, pictórico y simbólico.
- enseñar un algoritmo alternativo.

Actividad de práctica 6

En la actividad de práctica 6, el trabajo del alumno sugiere que el primer ejemplo fue hecho en conjunto con la clase. Al principio, el segundo ejemplo apareció en forma expandida. Sin embargo, en los ejemplos restantes se identifica un error permanente que no sigue ninguno de los otros dos ejemplos anteriores.

Patrón de error con un número mixto a una fracción impropia

Pasar cada número mixto a una fracción impropia

a) $1\frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ $\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5}$ $= \frac{7}{5}$	b) $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ $= \frac{5}{4}$
c) $2\frac{3}{8} = \frac{23}{8}$	d) $2\frac{1}{10} = \frac{21}{10}$
e) $3\frac{1}{6} = \frac{31}{6}$	f) $3\frac{1}{3} = \frac{31}{3}$

Las distintas opciones incluyen preguntar al alumno si las preguntas le hacen sentido (tenga presente que (d) fortuitamente sí hace sentido), trabajar al revés empezando con una fracción impropia y escribirla en forma de número mixto para comparar el original, o seleccionar el material concreto apropiado y volver a enseñar la materia.

Actividad de práctica 7

En la actividad de práctica 7, se tienen que considerar las siguientes preguntas: ¿existe un patrón de error permanente? ¿Existe interferencia de algún otro algoritmo? ¿Qué pudo estar pensando el alumno al momento de multiplicar 20 x 3 y 17 x 3, como en el ejemplo (e)? ¿Qué le preguntaría al alumno?

Patrón de error con la multiplicación de fracciones por un número natural

Encontrar el valor de cada uno de los siguientes ejercicios.

a) $\frac{2}{3}$ de 15 = $\frac{2^{\times 3}}{\cancel{3}_1} \times 15$ $= 5$ $\frac{2^{\times 3}}{\cancel{3}_1} \times 15 = 5$	b) $\frac{3}{4}$ de 20 = $\frac{3^{4}}{\cancel{4}_1} \times 20 = 5$ $= \frac{5}{4}$
c) $\frac{4}{5}$ de 30 = $\cancel{\frac{4^{\times 4}}{\cancel{5}_4} \times 30} =$ $= \frac{4^{8}}{\cancel{5}_8} \times 30 =$	b) $\frac{5}{6}$ de 36 = $\frac{5^{\times 6}}{\cancel{6}_1} \times 36 = 6$
e) $\frac{2}{3}$ de 48 = $\frac{2^{\times 3}}{\cancel{3}_1} \times 48 = 16$ $\begin{array}{r} 20^{\times} \\ 3 \\ \hline 60 \end{array}$ $\begin{array}{r} {}^{2}\;\;\; \\ 1\cancel{7}^{\times} \\ 3 \\ \hline 51 \end{array}$	e) $\frac{3}{4}$ de 60 = $\frac{3^{\times 4}}{\cancel{4}_1} \times 60 = 16$ $\begin{array}{r} {}^{1}\;\;\; \\ 15^{\times} \\ 3 \\ \hline 45 \end{array}$

Resolución de problemas

En Singapur, aunque algunos alumnos en segundo y tercero básico pueden haber ejercitado la resolución de problemas de manera informal, la aplicación formal de fracciones a la resolución de problemas comienza en cuarto básico, con los 'problemas de hasta dos pasos'. Además, con respecto a la resolución de problemas, se espera que los niños tengan una variedad de experiencias con el proceso implicado. Un método para las fracciones que se seleccionó en las directrices para cuarto año de enseñanza básica de la DPDC es el 'método unitario para encontrar el entero de una parte fraccionaria dada'.

Un ejemplo del método unitario se aplica a las fracciones de la siguiente forma:

$\frac{3}{4}$ de una colección de estampillas corresponde a 240. ¿Cuántas estampillas tiene la colección en total?

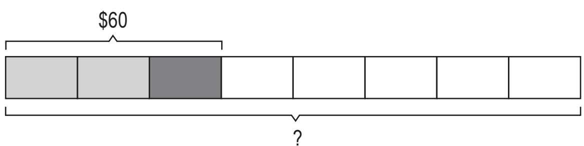
$\frac{3}{4}$ de una colección	$\rightarrow$	240 estampillas
$\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{240}{3} = 80$ estampillas
$\frac{4}{4}$	$\rightarrow$	$80 \times 4 = 320$ estampillas

Existen muchas otras estrategias para la resolución de problemas y heurísticas que los niños deberían practicar. Sin embargo, es evidente que el método de modelos, que por lo general se utiliza mucho a lo largo del currículo, también se debe utilizar. El siguiente conjunto de problemas se puede resolver con el método de modelos. Al prestarle mayor atención al diagrama del modelo mismo (la identificación de la unidad) y a la explicación aritmética adecuada, estos problemas pueden servir de práctica.

Actividades de práctica

Utilizar el método de modelo para resolver estos problemas con fracciones.

1. Samy gasta $\frac{1}{4}$ de su dinero en la primera semana y $\frac{1}{8}$ de su dinero en la segunda. Si gastó \$60 en total, ¿cuánto dinero tenía al principio?



2. La Sra. Pérez tenía \$320. Gastó $\frac{1}{4}$ de este dinero en una cartera y $\frac{1}{6}$ del resto en un vestido.
   a) ¿Cuánto le costó el vestido?
   b) ¿Cuánto dinero le ha sobrado a la Sra. Pérez después de sus compras?

3. Juana y Marta tienen \$128. Luego de que Juana gastara $\frac{1}{4}$ de su dinero y Marta \$37 dólares en un vestido, a ambas les quedó la misma cantidad de dinero.
   a) ¿Cuánto dinero tenía Juana al principio?
   b) ¿Cuánto dinero tenía Marta al principio?
   c) ¿Quién tenía más dinero al principio? ¿Cuánto más?

4. Nadia y María tienen 192 perlas. Luego de que Nadia le da $\frac{1}{5}$ de sus perlas a María, ambas quedan con el mismo número.
   a) ¿Cuántas perlas tenía cada una al principio?
   b) ¿Cuántas perlas más que María tenía Nadia?
5. La mesada de María es $\frac{3}{4}$ de la de Yolanda. La mesada de Heriberto es $\frac{2}{3}$ de la de María. Si la mesada de Yolanda es de $48 dólares, ¿cuál es la mesada de Heriberto?
6. Un bolígrafo cuesta 8 veces más que un libro de ejercicios. José gasta $\frac{2}{5}$ de su dinero en libros de ejercicio y $\frac{1}{3}$ de lo que resta en 3 bolígrafos. ¿Cuántos libros de ejercicios compró?
7. Un caja contiene algunos botones. $\frac{1}{4}$ de ellos son negros, $\frac{1}{8}$ son rojos y el resto son blancos. Hay 48 botones blancos más que botones rojos. ¿Cuántos botones hay en total?
8. La Sra. Linares tiene 4 metros de tela. Su plan es hacer bolsas reutilizables en donde cada una necesita $\frac{2}{3}$ de tela. ¿Cuántas bolsas puede hacer?

Resumen de los puntos principales

- Existen distintos significados y modelos asociados con las fracciones, tales como parte-todo, parte de un conjunto, fracción como número, y fracción como división y como razón, los que por lo general son los más utilizados en las aulas de enseñanza básica de Singapur.
- Al momento de nombrar una fracción, se infiere que el número debe ser la fracción de una unidad. Por lo general, se puede ayudar a los alumnos a recordar esta idea al preguntarles: ¿cuál es la unidad?
- Los numeradores y los denominadores cumplen diferentes funciones. Por ejemplo, con el significado parte-todo, el numerador indica el número de partes sombreadas, mientras que el denominador indica el número de partes en las que se ha dividido el entero (la unidad).
- Además de la enseñanza de los distintos significados de las fracciones, las fracciones equivalentes y los algoritmos de fracciones, los niños tienen que adquirir un sentido de los números fraccionarios por medio de, por ejemplo, ideas relacionadas con el número intermedio y el orden. Los niños tiene que perfeccionar la capacidad de estimar y utilizar los puntos de referencia correctos, tales como los números cercanos a 0, a $\frac{1}{2}$ y a 1.
- Evite utilizar palabras tales como ‘cancelar’ o ‘reducir’ cuando quiera que los alumnos hagan una simplificación.

- Los temas tratados en los textos de referencia y en otros capítulos de este libro también se deben integrar en la enseñanza de fracciones, lo que incluye las Tecnología de la Información, la Educación Nacional, el uso de juegos y la estrategia de enseñanza de la teoría de concreto-pictórico-abstracta (C-P-A).

Referencias

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (2006). *Mathematics syllabus—primary 2007*. Singapur: Ministerio de Educación

Fuentes de lectura complementaria

Grinstein, L. S. & Lipsey, S. I. (2001). *Encyclopedia of mathematics education*. Nueva York y Londres: RoutledgeFalmer.

Anexo 7-1

Temas/resultados	Apuntes de enseñanza
2° año de educación básica • Partes iguales de un entero: reconocer y nombrar las fracciones de la unidad. • Leer y escribir fracciones. • Comparar y ordenar unidades y fracciones similares. • Sumar y restar fracciones similares dentro de un entero.	• $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{12}$ • $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ • Los denominadores no deben exceder 12.
3° año de educación básica • Sumar y restar: dos fracciones relacionadas. • Fracciones equivalentes: incluye reconocer y nombrar, hacer una lista de las primeras ocho fracciones equivalentes de una fracción; escribir fracciones equivalentes de un numerador o denominador; y expresarlo en la forma más simple. • Comparar fracciones con respecto a la mitad. • Comparar y ordenar fracciones relacionadas y distintas.	Las fracciones relacionadas tienen denominadores que se relacionan porque uno es múltiplo del otro (como $\frac{1}{3}$ y un $\frac{1}{6}$). Las fracciones distintas tienen denominadores que son primos relativos (como $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$).
4° año de educación básica • Sumar y restar fracciones relacionadas y similares. • Números mixtos y fracciones impropias: expresar una fracción impropia como un número mixto y viceversa; expresar fracciones impropias y números mixtos de la forma más sencilla. • Las fracciones como un conjunto de objetos. • Productos de una fracción propia/impropia y de un número natural. • Problemas de enunciado: resolver problemas de hasta dos pasos.	• Incluye reconocer y nombrar fracciones como parte de un conjunto de objetos. • Incluye el uso del método unitario para encontrar el entero al conocer una parte fraccionaria.

Temas/resultados	Apuntes de enseñanza
5° año de educación básica • Concepto de fracción como división. • Cuatro operaciones. • Problemas de enunciado.	• Incluir asociación de fracciones con divisiones. • Sumar y restar fracciones propias y números mixtos. • Multiplicación de dos fracciones propias. • División de una fracción propia por un número natural.
6° año de educación básica • Cuatro operaciones. • Problemas de enunciado.	• Incluir la división de un número natural o fracción propia por una fracción propia.

*Fuente: datos seleccionados del Mathematics Syllabus-Primary 2007 (DPDC, 200b)[2].

2 Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC) (2006). *Mathematics syllabus-primary 2007*. Singapur: Ministerio de Educación.

Capítulo 8
La enseñanza de decimales

Tan-Foo Kum Fong

Introducción

La palabra ‘decimal’ proviene de la palabra en latín para ‘diez’. El uso de los decimales se remonta a muchos miles de años, pero los métodos modernos para anotar los decimales se inventaron hace menos de 500 años. Simon Stevin, un matemático holandés, parece haber sido el primero en usar el sistema de numeración decimal, en vez del sistema en base a doce o en base a sesenta, en su libro publicado en 1582. Stevin utilizó un marcador (un círculo con un número) en vez de utilizar la escritura romana que Fibonacci utilizaba. El símbolo utilizado para denotar una fracción decimal, por ejemplo para 3,948 se anotaba de la siguiente manera:

3 ⓪ 9 ① 4 ② 8 ③

A fines del siglo XVI, los avances en el campo de la astronomía se vieron limitados por los tediosos cálculos que debían hacerse. John Napier, un matemático escocés, se embarcó en la misión de resolver este problema. Los decimales como los conocemos ahora fueron utilizados por Napier, quien inventó logaritmos para realizar cálculos. En 1619, el punto decimal moderno pasó a ser la representación estándar en Inglaterra. En muchos otros países en Europa utilizan la coma en vez del punto decimal. Por ejemplo, 2.3 se escribe como 2,3.

Plan de estudio de matemática para la enseñanza de decimales

Los decimales se comienzan a enseñar en cuarto año de educación básica, después de que el concepto básico de fracciones se ha enseñado en los años anteriores (2° y 3° básico). También se enseña a los alumnos a utilizar los decimales en el contexto de dinero y mediciones para resolver problemas verbales.

Las materiales didácticos (objetos concretos) que se utilizan para enseñar los decimales son:

Concreto:

- Bloques multibase.
- Cuadrados decimales
- Varillas de medición
- Dinero (1 centavo, 10 centavos, 1 dólar)

Pictórico:

- Papel cuadriculado/cuadrillas
- Recta numérica

Existen dos enfoques distintos que sirven para ayudar a los alumnos a aprender acerca de los decimales:

- Enseñar a partir de los conocimientos de la notación posicional
- Enseñar a partir de los conocimientos de las fracciones

Enseñar a partir de los conocimientos de la notación posicional

El concepto de decimales se presenta en cuarto año de enseñanza básica y se relaciona con los conocimientos que los alumnos tienen acerca de la notación posicional de los números.

El valor de un número depende de su posición en el esquema de notación posicional. Por ejemplo, el número 456 es 4 centenas + 5 decenas + 6 unidades.

$$456 = 400 + 50 + 6$$

Cada dígito contribuye de acuerdo con su notación posicional y el valor total luego se suma entre todos.

Millares	Centenas	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas
	4	5	6	,			

Por lo tanto, según su notación posicional, el valor del número 123,789 es 1 centena + 2 decenas + 3 unidades + 7 décimas + 8 centésimas + 9 milésimas.

$$123{,}789 = 100 + 20 + 3 + 0{,}7 + 0{,}008 + 0{,}009$$

Millares	Centenas	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas
	1	2	3	,	7	8	9

Con el número 15,324 los alumnos deberían ser capaces de expresar el valor de los dígitos y relación que hay entre ellos. Por ejemplo, 3 décimas y 2 centésimas pueden considerarse como 32 centésimas.

Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas
1	5	,	3	2	4

Las palabras 'décimas' y 'centésimas' deben explicarse y mencionarse con cuidado cuando se analicen los números decimales. Al comenzar a enseñar este tema, aliente a los alumnos a que lean 0,23 como '23 centésimas' o '2 décimas y 3 centésimas' en vez de decir 'cero coma 23'.

Actividad 1

Comience con dos dígitos, por ejemplo, 2 y 3. Nombre todos los decimales que se pueden formar usando cualquiera o todos los dígitos en orden ascendente o descendente sin repetir ninguno. Además, no debería haber un cero o ceros entre los dos dígitos.

0,2	0,23	0,3	0,32	2,0	2,3	3,0	3,2	23,0	32,0

Para una versión más desafiante, incluya un dígito más que sea diferente. Con cualquiera o todos los dígitos, enumere todos los decimales posibles en orden. En este caso es válida la misma regla de oro: no debería haber un cero o ceros entre los dos dígitos. Por ejemplo, el decimal 2,03 no está permitido.

Con los dígitos 1, 2 y 3, a continuación se enumeran los números que se pueden formar en orden creciente utilizando uno o dos o todos los dígitos.[1]

0,1	0,12	0,123	0,13	0,132	0,2	0,21	0,213	0,23	0,231
0,3	0,31	0,312	0,32	0,321	1,0	1,2	1,23	1,3	1,32
2,0	2,1	2,13	2,3	2,31	3,0	3,1	3,12	3,2	3,21
12,0	12,3	13,0	13,2	21,0	21,3	23,0	23,1	31,0	31,2
32,0	32,1	123,0	132,0	213,0	231,0	312,0	321,0		

Esta actividad se puede realizar de muchas maneras. Podemos empezar por hacer que diferentes alumnos den valores decimales crecientes de forma consecutiva, que se puedan formar con los dígitos en una sucesión rápida. Deje que los alumnos en la clase reaccionen frente a las respuestas.

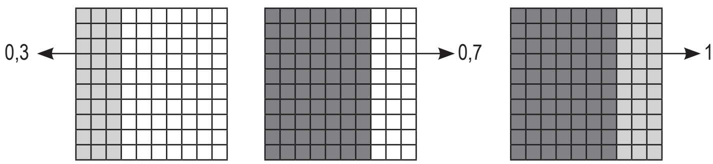
---

1 Adaptado del libro "Teaching Mathematics" (Enseñar las matemáticas) de Sobel & Maletsky (1999, p.95), un libro de recursos con pautas, actividades y estrategias.

Tan pronto alguien comete un error, el ciclo debe comenzar desde el principio con el alumno que empezó.

Enseñar a partir de los conocimientos de las fracciones

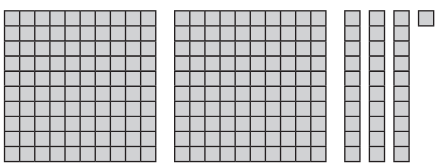
Tanto las fracciones como los decimales cumplen la misma función de describir partes de un entero. El concepto de fracción de un décimo, un centésimo y otras potencias de diez pueden utilizarse para explicar el concepto de decimales a los alumnos. Por ejemplo, 0,3 + 0,7 en decimales pueden considerarse como $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}$ en donde $0{,}3 = \frac{3}{10}$ y $0{,}7 = \frac{7}{10}$. Por ende, $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}$ significa que podemos sumar 3 décimos y 7 décimos, que en total es $\frac{10}{10} = 1$ entero, como se indica en el modelo.



Con este modelo, también podemos ayudar a que los alumnos comprendan el hecho de que 3 décimas es lo mismo que 30 centésimas y, por lo tanto, es equivalente a 300 milésimas.

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1\,000}$$

Los números decimales también se pueden representar de manera visual. El número 2,31 se representa con el modelo que se indica a continuación.



Representaciones concretas y gráficas de los decimales

Bloques multibase

Los niños necesitan modelos visuales de décimas, centésimas y milésimas para entender de manera concreta las relaciones que existen entre estos valores. Los bloques multibase de Diene pueden utilizarse para ayudar a los alumnos a interpretar los decimales y sus operaciones.

El bloque conformado por 1000 unidades pequeñas puede utilizarse para representar las unidades. La parte plana, que es un décimo del bloque, está compuesta de 100 unidades, las que se utilizan para representar las décimas. La parte larga, que es un décimo de la parte plana, representa la centésima y la unidad como milésima.

De manera alternativa, para interpretar un número decimal de dos dígitos, por ejemplo 23,45, se puede utilizar el bloque para representar las 'decenas', la parte plana para representar las 'unidades', la parte larga para representar las 'décimas' y las unidades para representar las 'centésimas'. En este caso, la representación sería 2 bloques, 3 partes planas, 4 partes largas y 5 unidades. Sin embargo, para evitar confundir a los alumnos, en un principio, el profesor puede escoger ser coherente en sus representaciones de los decimales con los bloques multibase, especialmente para los alumnos que avanzan más lentamente. Para los alumnos más hábiles, los profesores pueden utilizar los bloques multibase para presentarles el desafío de representar decimales como 2,345; 23,45, y 234,5.

También se pueden utilizar los bloques multibase para vincular los decimales a las fracciones.

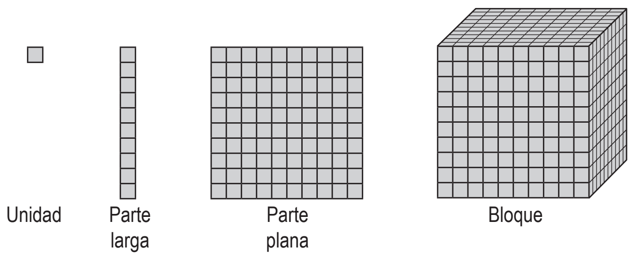
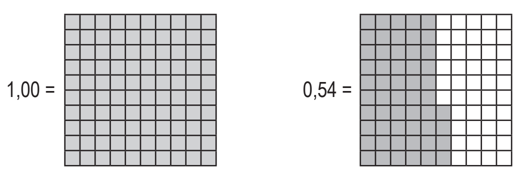


Ilustración 8-1 Los bloques multibase de Diene consisten en unidades individuales, partes largas (10 unidades), partes planas (10 partes largas), y bloques (10 partes planas).

Papel cuadriculado

El papel cuadriculado de 100 cuadrados es útil para mostrar diferentes fracciones decimales. Se les puede pedir a los alumnos que marquen con color partes de los cuadrados para mostrar y comparar diferentes representaciones decimales, y también para mostrar sumas y restas de decimales. Se les pueden presentar desafíos al pedirles que marquen el papel cuadriculado para obtener un decimal, por ejemplo 0,6 = 0,3 + 0,3; 0,6 = 0,2 + 0,4; o 0,6 = 0,1 + 0,5.



Recta numérica

Una recta numérica es una de las maneras más útiles de mostrar números. Para comenzar, considere una recta numérica estándar de izquierda a derecha, lo que permite comunicar más fácilmente a los alumnos las ideas matemática. Los conjuntos de fracciones decimales tienen la propiedad de que entre dos fracciones decimales cualesquiera en la recta numérica hay otra fracción decimal y la recta numérica puede mostrar esta propiedad.

Actividad 2

Como una actividad en clases, se les puede dar a los alumnos diferentes rectas numéricas. Dependiendo de la capacidad de los alumnos, el profesor puede continuar con la actividad y pedir a los alumnos que marquen las rectas numéricas para sub-dividir las unidades y marcar los decimales en la recta numérica.

Actividad 3

Entregue a los alumnos rectas numéricas dibujadas en un papel. Luego, entrégueles un número decimal (por ejemplo 0,6). Pídales que completen la actividad al contar hacia adelante o hacia atrás en décimos. Comience con otro número (por ejemplo 7,5 o 0,63), dependiendo de la capacidad del alumno y siga contando con otros intervalos (por ejemplo, 5 décimos).

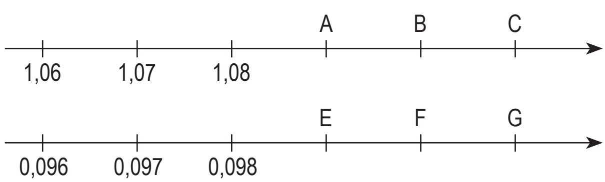
A continuación se muestran dos ejemplos posibles de los errores que pueden cometer los alumnos al contar.

Error 1—15,08; 15,09; 16,00

Error 2—20,97; 20,98; 20,99; 30,00

Actividad 4

Como alternativa, se puede dibujar la recta numérica y etiquetar los puntos en la recta como A, B y C, que los alumnos deben completar con el valor.

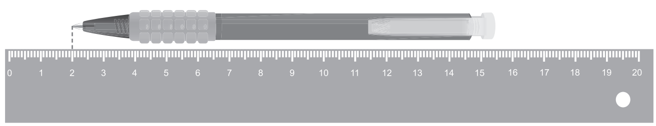


Con la ayuda de la recta numérica, se les pueden hacer preguntas a los alumnos para que piensen acerca de los decimales y los comprendan. Por ejemplo, imagine la recta numérica con los números 2 y 3.

- ¿Cuál es el decimal que se encuentra entre 2 y 3?
- ¿Dónde está 2,4 en la recta numérica?
- ¿Qué tan lejos está 2,4 de 2,7?
- ¿Cuál es el número que se encuentra entre 2,4 y 2,7?
- ¿Cuál es el número que se encuentra entre 2,35 y 2,45?

Regla y cinta para medir

Las mediciones son una manera de aplicar los conocimientos de los decimales al mundo real. Para ayudar a que los alumnos comprendan el sistema decimal, pueden trabajar en grupos pequeños midiendo objetos con cintas de medir o midiendo materiales que se encuentren alrededor con cuerdas y luego medir la cuerda con la cinta de medir. Las mediciones de longitud redondeadas a la centésima más cercana de un metro pueden anotarse en un papel y marcarse en las cuerdas, para que así los niños las puedan comparar. Sin embargo, los profesores primero deben estar seguros de que a los alumnos ya se les enseñó el tema de las mediciones antes de realizar esta actividad.



Dinero

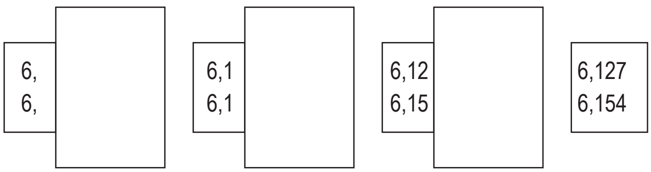
Además de las mediciones, se puede presentar un contexto realista con el dinero para comparar y hacer cálculos con decimales. Se les puede explicar a los alumnos que se pueden poner más ceros para designar la ubicación de los números, por ejemplo $3,20 en vez de $3,2. Con diferentes denominaciones de dineros, se pueden crear problemas reales y auténticos que incluyan decimales y las cuatro operaciones aritméticas. Por ejemplo, los profesores pueden preguntar a sus alumnos que consideren la idea de compartir $7387,20 entre 24 personas, y averiguar cuánto le corresponde a cada persona.

Aspectos específicos de la enseñanza

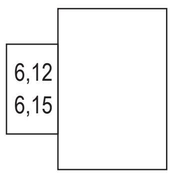
Comparar y ordenar decimales

Se les puede enseñar a los alumnos a comparar decimales al enfocarse en cada posición de la notación posicional de izquierda a derecha hasta que hagan una comparación. Esto se puede realizar al anotar los números en un papel, tapar el papel y revelar los dígitos de a uno y, en el proceso, hacer comparaciones. A modo de explicación, considere el siguiente ejemplo:

Compare y ordene los dos números 6,154 y 6,127.



En la estrategia de comparación de izquierda a derecha y dígito por dígito, los alumnos deben entender que, sin importar qué tan grandes sean los valores en las últimas columnas de un número decimal, este sigue siendo menor que el valor anterior en la columna previa.

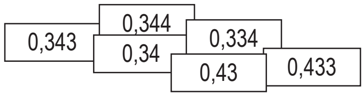


En el ejemplo anterior, no importa cuántos dígitos hayan después de la centésima, pues el primer número 6,12□ sigue siendo menor que 6,15 porque 2 es menor que 5 en la posición de la centésima.

Los alumnos que han adquirido un sólido conocimiento de los números podrán ordenar los decimales. Sin embargo, algunos alumnos que no comprenden bien los decimales pueden hacer inferencias sobre el valor de los números decimales de acuerdo con el largo de los dígitos después de la coma decimal. Por ejemplo, algunos alumnos pueden pensar que 0,45 es menor que 0,02345 porque '45' tiene menos dígitos en comparación con '2345'. Por el contrario, un alumno puede creer erróneamente que mientras más corto sea un número decimal mayor será su valor. Por ejemplo, 0,3 es mayor que 0,42 porque las décimas son mayores que las centésimas.

Actividad 5

Anote un conjunto de fracciones decimales en algunas tiras de papel. Entregue a cada alumno una tira de papel y dígales que lo amarren a una cuerda con un sujetapapeles o con un gancho para ropa en orden ascendente o descendente, de acuerdo con el valor de las fracciones decimales. Escoja los números con cuidado, con el fin de que el nivel de dificultad se ajuste a la capacidad cognitiva de los alumnos. Los alumnos que son más capaces encontrarán que esta actividad es interesante y desafiante. Es posible que los alumnos que participan en la actividad comenten y conversen sobre la misma.



Aproximación y estimación de decimales

Con frecuencia, es necesario redondear un decimal a la décima, centésima y milésima más cercana. Por ejemplo, cuando se trata de dinero, con frecuencia redondeamos a la centésima más cercana para que podamos leer el número en dólares y centavos.

Los alumnos deben entender que las reglas para redondear decimales son las mismas que para redondear número naturales. Cuando se redondea un número natural, nos guiamos por el dígito que sigue a la derecha. Si es mayor o igual a 5, los redondeamos a uno mayor. Si no, se redondea a uno menor. El mismo enfoque se adopta para los números decimales. Puede ser útil usar una recta numérica como ayuda para que los alumnos entiendan este concepto. Un material didáctico sencillo, como el que se muestra en la Ilustración 8-2, puede ayudar a que los alumnos recuerden la idea de redondear hacia un número mayor o menor.

Ilustración 8-2 Materiales didácticos preparados por Tan Ying Xiu, Noelle

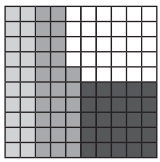
Cuatro operaciones en decimales: Suma, resta, multiplicación y división

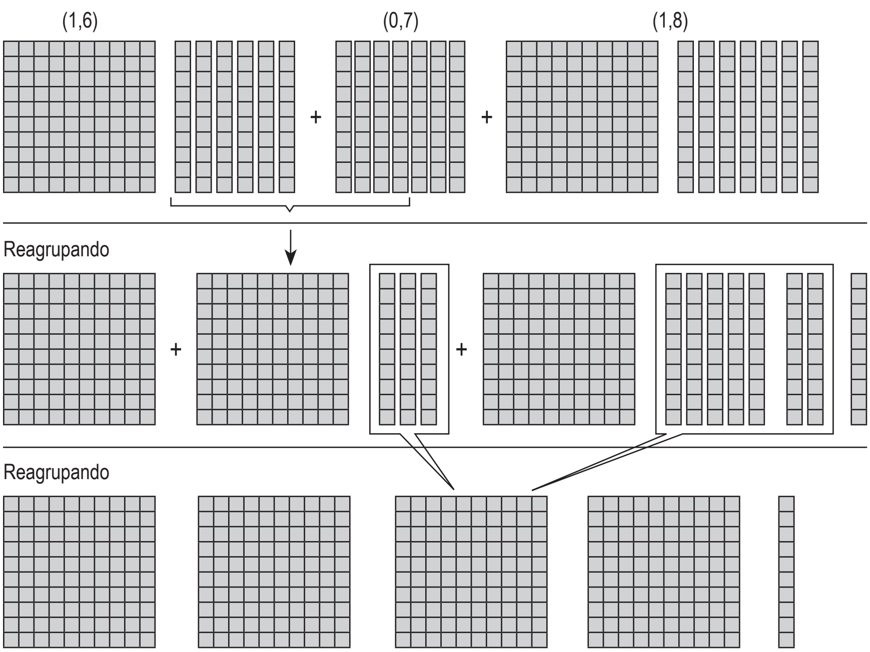
Los algoritmos para las cuatro operaciones con decimales son extensiones de los algoritmos de los números naturales. Sería bueno si podemos ayudar a nuestros alumnos a asociar cada paso del algoritmo con una acción concreta con la ayuda de modelos visuales.

Suma y resta de decimales

La suma y resta de decimales se debería relacionar con la suma y resta de números naturales y fracciones. Los alumnos pueden marcar los espacios en el papel cuadriculado y después 'leer' el decimal marcado. Las preguntas de suma y resta de decimales mixtos se pueden explicar con los bloques multibase. Comience con una suma sencilla, por ejemplo 0,2 + 0,3. Luego, siga con sumas que impliquen cálculos más difíciles, como por ejemplo 0,2 + 0,26 + 0,25 y sumas de fracciones decimales que requieren volver a organizar unidades, décimas y centésimas, por ejemplo 1,6 + 0,7 + 1,8.

0,2 + 0,26 + 0,25 = 0,71





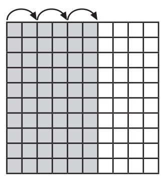
Por lo tanto, 1,6 + 0,7 + 1,8 = 4,1.

La suma y resta de decimales también podría significar ordenar las posiciones en el gráfico de notación posicional, por ejemplo 2,56 + 23,78 y 32,56 – 3,78.

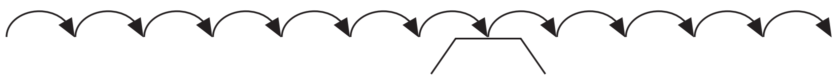
$$\begin{array}{r} 2{,}56 \\ +\ \underline{23{,}78} \\ 26{,}34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32{,}56 \\ -\ \underline{3{,}78} \\ 28{,}78 \end{array}$$

Multiplicación de decimales por un número natural

La multiplicación de decimales se puede relacionar a las operaciones con números naturales y fracciones, como en el modelo de área o el modelo de suma repetitiva, por ejemplo 3 x 0,2 = 0,6 (se lee: 3 por 2 décimas).



En la recta numérica se representa otro ejemplo: 12 x 0,15 = 1,8.



Los alumnos pueden descubrir la regla de multiplicar decimales por números naturales de diversas maneras, por ejemplo:

- con la ayuda de calculadoras para examinar patrones.
- al convertir decimales a fracciones y desarrollar la regla por medio de la multiplicación de fracciones.

Los profesores deben entender que la multiplicación de decimales puede ser contraria a las creencias de los alumnos de que el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor. Esta noción la adquieren debido a los ejercicios de multiplicación entre números naturales. Alternativamente, podemos mostrar a los alumnos que 2,3 x 9 puede verse como 23 décimas × 9 o $\frac{23}{10} \times 9$, así:

$$\begin{array}{rll} 2{,}3 & 3 \text{ décimas} \times 9 & = 27 \\ & & = 2 \text{ unidades y 7 décimas.} \\ \times \quad 9 & 2 \text{ unidades} \times 9 & = 18 \text{ unidades} \\ & & = 1 \text{ decena y 8 unidades.} \\ \overline{\underline{20{,}7}} & \text{Por lo tanto, } 2{,}3 \times 9 & = 1 \text{ decena} + 8 \text{ unidades} + 2 \text{ unidades} + 7 \text{ décimas} \\ & & = 2 \text{ decenas y 7 décimas.} \\ & & = 20{,}7 \end{array}$$

o
$$\begin{array}{rl} 23 & \text{décimas} \\ \times\ 9 & \\ \hline \underline{207} & \text{décimas} \end{array} \qquad 207 \text{ décimas} = 2 \text{ decenas y } 7 \text{ décimas} = 20{,}7$$

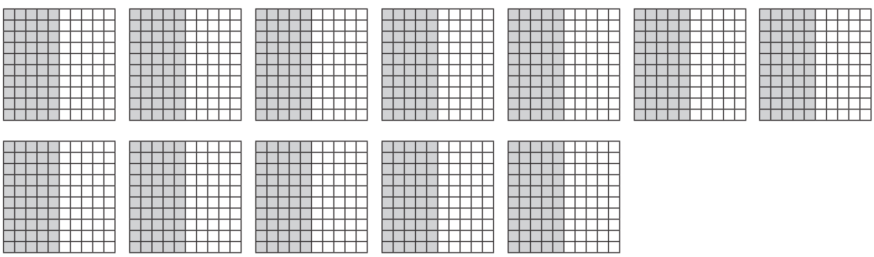
o $\frac{23}{10} \times 9 = \frac{207}{10} = 20\frac{7}{10}$

División de decimales por un número natural

Al igual que con la multiplicación, en donde los alumnos pueden creer, erróneamente, que siempre salen resultados grandes, los alumnos pueden pensar que 'la división siempre da resultados más pequeños' y que 'el divisor debe ser menor que el dividendo'.

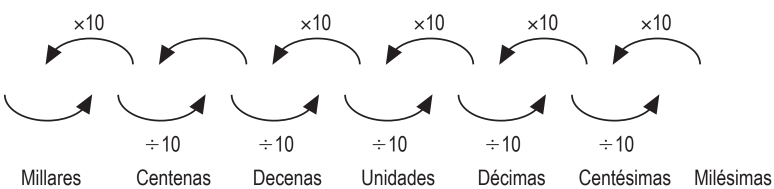
Entender la división por un decimal, especialmente cuando es menor que 1, requiere que se explique con un modelo concreto. Por ejemplo, para ayudar a los alumnos que les cuesta entender la división de decimales, por ejemplo $12 \div 0{,}5 = 24$, los profesores pueden entregar un modelo y pedir a los alumnos que calculen '¿cuántos 0,5 hay en 12 enteros?'

Luego, esta interpretación se puede extender a otras expresiones que incluyan divisiones decimales, como $0{,}8 \div 0{,}1 = 8$ y $0{,}25 \div 0{,}05 = 5$.



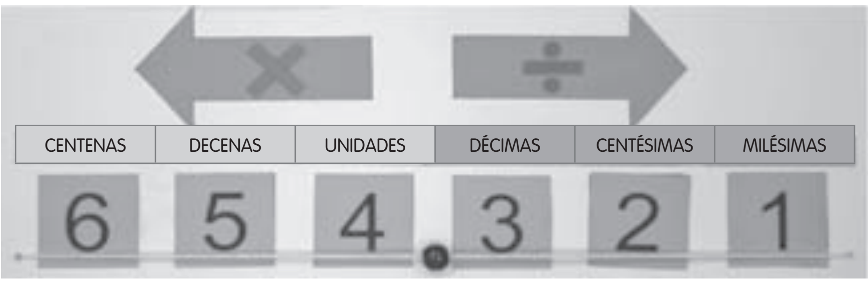
Multiplicación y división de decimales por potencias de 10

Es importante desarrollar un sentido de la magnitud de los números decimales cuando se multiplica y divide por potencias de 10. Además de tener que saber los nombres y el tamaño de las columnas, los alumnos deben comprender bien que el valor de cada columna es diez veces más que el valor de la columna a la derecha, y lo inverso para la columna a la izquierda. Esto se explica en la ilustración a continuación.



De manera alternativa, podemos mostrar a los alumnos la multiplicación y división al mover la coma decimal. Sin embargo, los profesores deben tener en cuenta que la enseñanza que solo se centra en 'mover las comas decimales' puede resultar en una comprensión meramente instrumental. Los alumnos pueden confundirse sobre la dirección en que deben mover la coma decimal o cuando deben añadir o sacar ceros.

A continuación se indica un material didáctico sencillo para ayudar a los alumnos a entender este concepto. El botón representa la coma decimal, el que se puede mover hacia la izquierda cuando el número se multiplica por 10 y a la derecha cuando se divide por 10. Los números en el gráfico de notación posicional se pegan con cinta adhesiva despegable y se puede cambiar a cualquier número que el profesor elija.



*Fuente: fotografía © Tan-Foo Kum Fong

Dificultades de aprendizaje

A continuación se destacan algunas creencias erróneas que los alumnos puedan tener a la hora de aprender acerca de los decimales. Esta lista no es exhaustiva.

- Algunos alumnos pueden creer que hay una columna de 'unécimas' inmediatamente después de la coma decimal, porque las 'decenas' son la segunda columna desde la coma decimal en el gráfico de notación posicional de número naturales. Como resultado, estos alumnos perciben que la columna de las 'décimas' será la segunda columna a la izquierda y pueden escribir 3 décimas como 0,03.
- Los decimales se pueden leer de diversas maneras y, a veces, la forma en que leemos decimales puede no ser de ayuda para los alumnos desde una perspectiva matemática. Por ejemplo, $4 \times 4 = 16$ y $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$. De manera similar, $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$; por lo tanto, pueden concluir que $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9$.

- Algunos alumnos no son capaces de identificar el valor del número decimal porque se confunde con el valor de la notación posicional de los dígitos en el sistema numérico. Por ejemplo, los estudiantes pueden confundirse con la posición de los numerales, como el valor del dígito ‘3’ en los números 0,3, 0,03 y 0,003.
- El enfoque práctico, cuando se trata con dinero, es redondearlo a 2 lugares decimales. Los alumnos quizás no comprenden el valor de los ceros como dígitos que demarcan una posición. Por ejemplo, no son capaces de comprender por qué $4,30 se escribe de esa manera, en vez de $4,3 cuando resuelven problemas que implica dinero, o 4,3 en vez de 4,30 cuando se trabaja con números decimales puros.
- En los conceptos de números naturales, los números más grandes son las unidades con más dígitos. Si se aplica esta misma percepción, los alumnos pueden creen que 0,27 es mayor que 0,3 porque el número 27 es mayor que 3. De manera similar, es posible que crean que los decimales más cortos sean los número mayores porque en fracciones, $\frac{1}{29}$ es menor que $\frac{1}{3}$.
- Algunos alumnos confunden el significado de ‘decenas’ con el de ‘décimas’, ‘centésimas’ y ‘milésimas’.
- Los alumnos no entienden la función de la notación posicional en la suma y resta, por ejemplo.

$$\begin{array}{r} 32{,}4 \\ +\ 0{,}25 \\ \hline 3{,}49 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}6 \\ -\ \ \ 2 \\ \hline 9{,}4 \end{array}$$

- Algunos alumnos pueden ver la coma decimal como un separador de dos números naturales. Por ejemplo, los alumnos que aún no logran vincular los decimales con las fracciones pueden percibir un decimal, por ejemplo 2,32, como un número conformado por dos tipos diferentes de números naturales: el ‘2’ como un número natural de una unidad y ‘32’ como el número natural de otra unidad. Esta percepción puede que provenga de algunos contextos en particular, como el dinero en ciertos países, en donde la coma decimal actúa como un separado entre dos denominaciones: dólares y centavos. No entienden que el valor de las cifras después de la coma decimal representa las décimas y centésimas en el sistema numérico.

Ejemplo de actividades para profesores y alumnos

Una buena manera de descubrir lo que piensan los alumnos acerca de los números es pedirles que inventen una historia sobre una situación en donde las operaciones con decimales sean relevantes. A continuación, se otorga un ejemplo.

Escriba una historia sobre las operaciones que se indican aquí.

- $0{,}2 + 0{,}34 = 0{,}54$
- $0{,}8 \div 5 = 0{,}16$

Proponer problemas matemáticos también es una buena manera de comprobar lo que se entiende de los decimales. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7

Uno de tus amigos, Daniel, te pide ayuda con los decimales. Te muestra algunas preguntas que ha escrito.

a) $1{,}6 + 2{,}4 = 3{,}10$

b) $1{,}2 \times 10 = 1{,}200$

c) $4{,}0 \div 10 = 4$

d) $\frac{4{,}05}{10} = 4{,}5$

e) $1{,}23 + 3{,}5 = 0{,}158$

1. Primero revisa las preguntas de Daniel. Si la respuesta es correcta, pon una marca para decir que está bien. Si no es correcta, escribe la explicación y corrige la respuesta de Daniel.
2. Inventa otra pregunta que creas que Daniel puede responder de manera correcta después de leer la explicación. Muéstrele como obtener la respuesta.
3. Escribe otras dos preguntas que creas que Daniel no sabe cómo responder. Escribe las respuestas que creas que Daniel va a dar. Escribe las explicaciones que quieres que Daniel lea.
4. Inventa una pregunta muy difícil que creas que Daniel responderá de manera correcta.

Ejemplo 8

Te dan dos números que se han redondeado a 12,0 y 13,0 pero no estás seguro de si estos decimales se han redondeado hacia el número mayor o menor decimal. Escribe una carta a un amigo para describir cuál es la diferencia más grande y más pequeña entre estos dos números.

Ejemplo 9

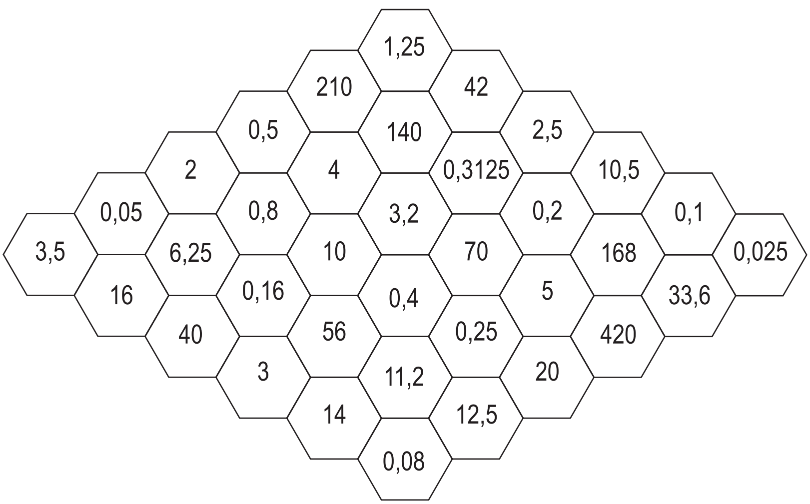
Juego de división

Reglas del juego:
Los participantes del equipo A y del equipo B escogen, en turnos, dos de los números de la lista.

4 20 100 80 840 2 10 50 5 25 280 1000

Instrucciones:

- Dividir el primer número por el segundo número escogido.
- Si la respuesta está en el tablero del juego, se debe poner la marca del equipo allí. (A o B)
- El primer equipo que recorre el camino de respuestas que conectan los dos lados del tablero gana.



Ejemplo 10

Ejemplo de preguntas en la vida real

1. María compró 12 peras y 4 manzanas. Juana compró 12 manzanas y 4 peras. Juana pagó $2,40 menos que María. Si una manzana cuesta 55 centavos, ¿cuánto cuesta una pera?

   (Resp: 85 centavos)

2. Una compañía de transporte entregó 1000 floreros al Sr. López. La empresa cobró 40 centavos por cada florero entregado, pero tuvo que pagar al Sr. López $5,10 por cada florero que se rompió durante el transporte. El Sr. López pagó en total $383,50 por el despacho, ¿Cuántos floreros se rompieron? (Resp: 3 floreros)
3. Juan ahorra 50 centavos por día. Ana ahorra 20 centavos más que Juana por día. Ana comienza a ahorrar 8 días después que Juan. Si Ana ha ahorrado $10 más que Juan, ¿cuánto ha ahorrado Ana? (Resp: $49)
4. En la tabla se muestra el costo de varios elementos. Juana compró 3 de los artículos y Tomás compró 2 de los elementos que quedan. Juana gastó el doble que Tomás. ¿Qué artículos compraron?

   (Pista: considera que el monto que gasta Juana es el doble de lo que gasta Tomás. Se puede utilizar Excel para obtener la respuesta).

Artículo	Precio
Una caja de lápices	$5,70
Carpeta	$2,70
Agenda	$2,40
Novela	$5,00
Gorro	$7,20
Polera	$18,10

Referencias

Sobel, M. A. & Maletsky, E. M. (1999). *Teaching mathematics: A sourcebook of aids, activities and strategies*. Boston: Allyn and Bacon.

Fuentes de lectura complementaria

Cathcart, W. G. (2001). *Learning mathematics in elementary and middle schools*. Columbus, OH: Merrill-Prentice Hall.

Grinstein, L. S. & Tipsey, S. I. (2001). *Encyclopedia of mathematics education*. Nueva York y Londres: RoutledgeFalmer.

Musser, G. E,, Burger, W. F. & Peterson, B. E. (2003). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach*. Nueva York: John Wiley.

Reys, R. E,, Suydam, M,, Lindquist, M. & Smith, N. L. (2001). *Helping pupils learn mathematics*. (6° ed.). Nueva York: John Wiley.

van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Nueva York: Longman Addison Wesley.

Capítulo 9

La enseñanza de porcentajes

Ng Luan Eng

Introducción

El término 'por ciento' significa literalmente 'por un cien', que en latín es 'per centum'. Los alumnos o profesores que se interesan en el desarrollo histórico de esta idea pueden encontrar útil la siguiente información.

El concepto de porcentaje proviene de la necesidad de las sociedades de calcular intereses, ganancias y pérdidas, e impuestos. En la edad media, a medida que empezaron a utilizarse cifras más cuantiosas de dinero, el 100 se convirtió en la base común para hacer cálculos. Los manuscritos italianos del siglo XV contienen expresiones tales como '20p100', 'X p cento' y 'vi p c^{o}' para indicar 20 por ciento, 10 por ciento y 6 por ciento, respectivamente. El símbolo '%' probablemente tiene su origen en un símbolo introducido en un manuscrito italiano en el año 1425. En vez de 'por 100', 'P100' o 'P cento', que era lo que comúnmente se utilizaba en esa época, el autor utilizó 'P./'. Cerca de 1659, el './' se había convertido en '%', por lo que se utilizaba con frecuencia 'por %'. Finalmente, se eliminó la palabra 'por' y se dejó el símbolo '%' solo, que es lo se usa en la actualidad.

Concepto clave

Los porcentajes, por lo general, se asocian a las razones o a las tasas. En los porcentajes, la base de comparación es 100. Por lo tanto, x % es lo mismo que x por cien, o x por 100. Por ejemplo, 40 % significa 40 de 100.

Algunas dificultades de aprendizaje y nociones erróneas

Los niños pueden tener problemas al expresar una fracción como porcentaje. Tomemos como ejemplo el siguiente problema:

> $\frac{3}{4}$ *de una página se pinta azul. ¿Qué porcentaje de la página es de color azul?*

Un método posible es el siguiente: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 100\% = 75\ \%$. Los niños tienen que reconocer que 1 entero = 100%. Algunos tienen problemas con este concepto. Por favor consulte la actividad del alumno 1 para ayudar a los alumnos a adquirir este importante concepto.

Otro error común es utilizar incorrectamente el valor 'entero' para encontrar la respuesta. Por ejemplo:

¿Qué es 50% de 100?

Es posible que los alumnos den respuestas erróneas, tales como $\frac{100}{50} = 2$ ó $\frac{100}{50} \times 100 = 200$.

Por lo general, a los niños les cuesta identificar la base correcta cuando calculan porcentajes. La Actividad del Profesor 2 servirá de ayuda para que los profesores identifiquen las dificultades que puedan tener los alumnos en relación a los porcentajes.

Los alumnos deben entender cuál es la 'base' para realmente comprender las siguientes frases y emitir juicios respecto a la información que otorgan: "4,5 % de desempleo", "el porcentaje de aprobación en las pruebas de matemática disminuyó de 98,2 % a 95,6 % en 2003", "el IVA aumentó del 3% al 5%" y "los crímenes aumentaron en un 200%".

Enfoques de enseñanza generales

1. Los porcentajes se presentan una vez que los alumnos ya tienen mayor conciencia sobre las fracciones, los decimales y las razones, debido a que estas ideas, por lo general, se utilizan al momento de resolver problemas relacionados con el cálculo de porcentajes. En la tabla a continuación se muestran algunos de los métodos comunes para la resolución de problemas con porcentajes.

Enfoque	Ejemplo
Punto de referencia: utilizar puntos de referencia comunes (por lo general los % se pueden reemplazar con unidades de fracción).	Encontrar 75% de $160. Dado que 25% de 160 es $40, 75% de $160 es $120.
Fracciones: transformar el porcentaje/conjunto dado en una fracción y luego resolver el problema haciendo los cálculos apropiados con la fracción.	Encontrar 75% de $160. $75\% = \frac{75}{100}$ $\frac{75}{100} \times \$160 = \$120$ ¿Qué porcentaje es $7 de $28? $\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$

Enfoque	Ejemplo
Decimales: expresar el porcentaje dado como un decimal y llevar a cabo la operación necesaria para el decimal.	Encontrar 75% de \$160. 0,75 × \$160 = \$120
Unitario: encontrar 1 unidad o 1 % de la cantidad primero, y luego buscar la proporción.	¿Qué porcentaje es \$7 de \$28? $\$28 \rightarrow 100\%$ $\$1 \rightarrow \frac{100}{28}\%$ $\$7 \rightarrow \frac{100}{28} \times 7 = 25\%$
Razón: el % se vuelve a nombrar como un conjunto fraccionario igual a otra fracción con 100 como base.	¿Qué porcentaje es \$7 de \$28? $\$28 \rightarrow 100\%$ $\$7 \rightarrow ?\ \%$ $\$28 \times ?\ \% = \$7 \times 100\%$ $?\ \% \rightarrow \frac{100}{28} \times 7 = 25\%$

*Fuente: Koay (1988)

2. Para enseñar el concepto de porcentajes en distintos contextos, se pueden utilizar diversas representaciones, como el dinero, las rectas numéricas y los modelos de fracciones.
3. Los porcentajes tienen varias aplicaciones en la vida diaria y los niños pueden llegar a considerar este tema como uno importante si cuentan con las oportunidades para participar en proyectos y tareas abiertas.

Algunas actividades para profesores

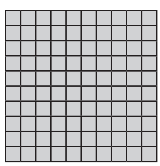
Actividad 1

A continuación se indican algunas representaciones que se utilizan comúnmente a la hora de enseñar porcentajes. Decida qué modelo de representación utilizará para enseñar porcentajes y justifique su decisión.

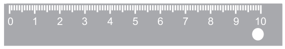
1. Dinero

   Un dólar equivale a 100 centavos. 50 centavos son \$0,50 y corresponde a la mitad de un dólar, que es 50%.

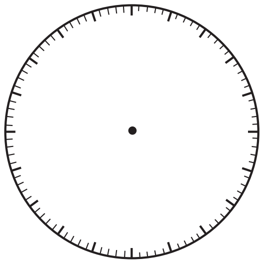
2. Modelo de fracciones y decimales



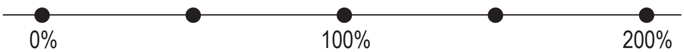
3. La regla métrica



4. La tabla circular de porcentaje



5. La recta numérica



Actividad 2

Señale si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Explique su respuesta.

1. A es $\frac{4}{5}$ de B, lo que significa que B es $\frac{5}{4}$ de A.
2. A es $\frac{3}{5}$ % de B, lo que significa que B es $\frac{5}{3}$ % de A.
3. Si A es 12 % más que B, entonces B es 12% menos que A.
4. Si A aumenta en un 10 % y luego disminuye en un 10 %, entonces el resultado es igual a A.
5. Si A aumenta en un 12 % y luego vuelve a aumentar en un 8 %, entonces el aumento general es 20 % de A.
6. A recibe un aumento de un 15 %, seguido de una disminución de un 5 %. Es lo mismo que cuando A recibe una disminución de un 5 %, seguido de un aumento de 15 %.
7. En una clase, el número de niños en relación con el número de niñas está en una razón de 4 : 5. Por lo tanto, el número de niños es el 80 % del número total de alumnos en la clase.
8. El número de niños en una clase es de 40 % y el número de niñas es el 60 %. Lo anterior significa que el número de niñas es mayor que el número de niños en la clase por un 20 %.
9. En una clase, hay 30 % más de niñas que de niños. Esto significa que el 70 % de la clase son niñas y el 30 % son niños.

Actividad 3

A veces a los alumnos les cuesta resolver los siguientes problemas de enunciado. Resuelva los problemas y converse con sus colegas para ver (i) cómo se pueden resolver los problemas y (ii) cómo se puede ayudar a los niños a resolver estos problemas.

1. La tabla a continuación muestra la cantidad de dulces que hay en la bolsa de dulces que compró María. Una de las cantidades ha sido borrada.

Tipos de dulces	Cantidad de dulces
Frutosos	28
Ingeniosos	32
Deliciosos	

Si 20 % del número total de dulces son de la marca Deliciosos, ¿cuántos dulces de este tipo hay?

(1) 12 (2) 15

(3) 20 (4) 30

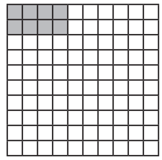
2. Marcos gana un salario fijo al mes. En enero ahorró un 20 % de su salario. En febrero ahorró 20 % más que en enero. Sus ahorros totales en estos dos meses llegaron a $440. ¿Cuál es su salario mensual?
3. Juana tiene en su refrigerador dos tipos de bebida en lata, Bebida A y Bebida B. El 20 % de las latas son Bebida A. Luego, compra un número similar de latas de Bebida A y las suma a las latas que ya tiene.
   a) ¿Aumentará, disminuirá o se mantendrá igual el porcentaje de Bebida A?
   b) ¿Qué porcentaje corresponde a la Bebida A?
4. La tienda A vende un vestido por $400, lo que es un 25 % más caro que el precio al que lo vende la tienda B.
   a) ¿Cuál es el precio del vestido en la tienda B?
   b) Durante la temporada de rebajas, ambas tiendas ofrecen el mismo porcentaje de descuento para el vestido. La Sra. Gallardo compra el vestido en la tienda B y paga $60 menos que el precio con descuento de la tienda A. ¿Cuál es el porcentaje de descuento?

Actividades para los alumnos

Actividad 4

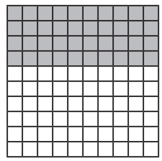
A continuación se presentan algunas matrices de cien cuadrados.

a) ¿Cuál es el porcentaje de los cuadrados sombreados en la matriz?

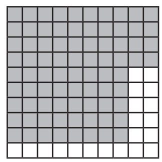


$\frac{80}{100} = 8$ %

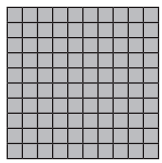
b) ¿Cuál es el porcentaje de los cuadrados sombreados en la matriz?



c) ¿Cuál es el porcentaje de los cuadrados sombreados en la matriz?



d) ¿Cuál es el porcentaje de los cuadrados sombreados en la matriz?



Actividad 5

Resolver problemas utilizando porcentajes puede ser confuso. Como todos los temas que implican un razonamiento proporcional, se debe tener claro cuál es la base de comparación. Sin embargo, con frecuencia, los alumnos no tienen muy clara esta idea. Las siguientes preguntas ilustran la necesidad de enfatizar la importancia de la base.

a) Hay 50 niños y 25 niñas en un club de ajedrez. ¿Cuántos niños más que niñas hay en porcentaje?
¿Por qué la siguiente solución no es aceptable? ¿Cuál es la respuesta correcta?
Hay un total de 50 + 25 = 75 alumnos

$\frac{25}{75} \times 100\% = 33{,}3$ % (% de niñas)

$\frac{50}{75} \times 100\% = 66{,}7\%$ (% de niñas)

66,7 – 33,3 % = 33,4 %

Hay 33,4 % más niños que niñas.

b) En 2004, mi salario aumentó en un 10 %. En 2005, debido a la situación económica, acepté un 10 % de recorte de sueldo. En total, mi salario en 2005 es el mismo que mi salario en 2004. ¿Es posible?

Actividad 6

Esta actividad sirve para que los alumnos ejerciten sus habilidades de razonamiento lógico en el proceso de aplicación del concepto y las habilidades aprendidas.

- Estos son anuncios de dos tiendas de juguetes, Tienda A y Tienda B, que participan en la Gran Venta de Singapur.

Anuncio A

20% de descuento en todos los juguetes.

30% sobre el precio reducido para un total de ahorro de un 50%.

Anuncio B

Ahorra un 50% en todos los juguetes a precio normal

¡Todos los precios normales a mitad de precio!

1. Si un juguete cuesta $ 50 antes de la rebaja, ¿cuánto costará en la Tienda A y en la Tienda B durante la temporada de rebajas?
2. ¿Cuál de los anuncios es engañoso? Explique.

Actividad 7

Esta actividad es una tarea enriquecedora que permite evaluar el conocimiento que tienen los alumnos de los porcentajes y les recuerda que tienen que examinar la base antes de hacer comparaciones justas basadas en el buen juicio.

- ¿Cuándo es un 20 % de descuento mejor que $ 20 de descuento?

Para los niños más habilidosos, esta tarea puede ir coordinada con la escritura de una bitácora. Para los niños que necesitan más ayuda, la tarea se puede estructurar más. Por ejemplo:

- ¿Qué ocurre si el precio original es $ 10, $ 100 y $ 200?
- Escribe algunos comentarios importantes.

Actividad 8

Recibes $100 para ayudar a tus padres a obtener un buen trato en algunas ofertas promocionales en un catálogo de compras. Analiza el impuesto al valor agregado (IVA) y el porcentaje de descuento que se ofrece en el catálogo. Una vez que has obtenido la información, registra tus hallazgos en la tabla a continuación. A modo de ejemplo ya se ha registrado la primera fila de datos.

Artículo	Precio original del artículo	Impuesto al valor agregado (IVA)	Porcentaje de descuento	Precio final del artículo
Galletas	$1,95	5%	30%	

Pensar

¿Habría una diferencia si el IVA se calcula primero y luego sigue el descuento o el descuento primero y luego el IVA?

Referencias

Koay, P. L. (1998). *Knowledge of Percent of Pre-Service Teachers*. The Mathematics Educator, 2(3), 54-69.

Fuentes de lectura complementaria

Bassarear, T. (2004). *Mathematics for Elementary School Teachers.* Boston, NY: Houghton Mifflin Company.

Cathart, G., Pothier, Y. M., Vance, J. H y Bezuk, N. S. (2003). *Learning mathematics in elementary and middle schools Upper Saddle River*, NJ: Pearson Merrill Prentice Hall.

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (2000). *Mathematics Syllabus—Primary 2001.* Singapur: Ministerio de Educación.

Foong, P. Y. (2003). Course notes on the teaching of percent. Singapur: Instituto Nacional de Educación.

Mathematics and Mathematics Education Academic Group. (2004). *The green book: Resources and ideas for teaching secondary mathematics*. Singapur: Instituto Nacional de Educación.

Capítulo 10

La enseñanza de razones

Chan Chun Ming, Eric

Introducción al plan de estudios

El tema de las ‘razones’ se enseña en el quinto y sexto año de educación básica. El contenido pedagógico, que se basa en el plan de estudios del DPDC de 2007, requiere que se cumplan los objetivos de aprendizaje que se muestran en la Tabla 10-1.

Tabla 10-1 Plan de estudios del Ministerio de Educación para el tema de ‘razones’

5° año de educación básica: los alumnos deberían ser capaces de:

- interpretar a : b y a : b : c, en donde a, b y c son números naturales.
- escribir razones equivalentes.
- expresar una razón en su forma simplificada.
- encontrar la razón entre dos o tres cantidades.
- encontrar la cifra que falta en un par de razones equivalentes.
- encontrar una cantidad en referencia a otra cantidad y su razón.
- resolver problemas de enunciado de hasta dos pasos.

6° año de educación básica: los alumnos deberían ser capaces de:

- expresar una cantidad como una fracción de otra cuando se conoce su razón y viceversa.
- encontrar cuántas veces una cantidad más tan grande que otra si se conoce su razón y viceversa.
- expresar una cantidad como una fracción de otra o encontrar cuántas veces una cantidad es más grande que otra si se conocen ambas cantidades.
- encontrar el entero o una parte cuando un entero se divide en partes según una razón dada.
- resolver problemas de enunciado que involucren 2 pares de razones.

El aprendizaje de las razones se encuentra estrechamente relacionado con el concepto de proporción. A pesar de que en los objetivos de aprendizaje del plan de estudios las proporciones no se mencionan de manera explícita, no se debería dejar de lado su estudio.

Razonamiento frente a las razones y proporciones

Una razón es una comparación de dos cantidades (o incluso tres cantidades según se indica en el plan de estudios) y tiene una relación de multiplicación[1] entre las dos (o tres) cantidades. Una proporción es una igualdad entre dos razones. Cuando se comparan cantidades en razones, como en estas relaciones en donde se han explorado y extendido las cantidades, la capacidad de razonar acerca de estas y sus relaciones sugiere que se está aplicando un razonamiento proporcional (Billings, 2001). Una manera sencilla de expresar una proporción a la luz de las razones es aumentar o disminuir la razón.

Ejemplo

Se venden manzanas a 3 por $1. La razón es 3 : 1	(razón)
Si pago $5, puedo obtener 5 × 3 o 15 manzanas.	(razonamiento proporcional)

Conceptos de razones

En esta sección del capítulo se definen los conceptos de razones. Como las razones se tratan de relaciones entre cantidades que son fijas, es esencial conocer los diferentes tipos de relaciones y cómo se representan. Las relaciones también se pueden representar en aspectos discretos y continuos. Una vez que se comprenden los conceptos básicos de las razones, es posible entender los conceptos de nivel superior, especialmente cuando se opera con dos razones y escenarios de antes-después. En la Tabla 10-2 se destacan los conceptos esenciales.

1 Esto lo distingue de una relación sumativa (es decir, una cantidad es X veces más que la otra cantidad). En la siguiente sección se presentan más detalles.

Tabla 10-2 Conceptos de razones

Concepto	Ejemplo
Relaciones entre x : y, x ÷ y, y $\frac{x}{y}$ Cai y Sun (2002) brindan una definición para esta relación, en donde x : y tiene una relación de multiplicación entre las dos cantidades. Cuando se comparan las dos cantidades, el 'valor de la razón' es el cociente $\frac{x}{y}$ derivado de x ÷ y. Se debe tomar en cuenta que el término 'valor de la razón' no se utiliza en nuestro plan de estudio para la educación básica.	Hay dos barras de chocolate, X e Y. X mide 15 cm e Y mide 5 cm de largo. ¿Cuántas veces es X más larga que Y? La razón se puede anotar como X : Y, que es 15 : 5. El valor de la razón es 3, que deriva de X ÷ Y. En términos conceptuales, esta idea es similar a decir que 15 es 3 veces tanto como 5.
Comparación parte-todo y viceversa	Hay 15 niños y 25 niñas en una clase. El número de niños en relación con el número total de alumnos en la clase están en una razón de 15 : 40.
Comparación de una parte por una parte	Hay 15 niños y 25 niñas en una clase. El número de niños en relación con el número de niñas en la clase están en una razón de 15 : 25.
Razones equivalentes y razones en su forma simplificada	2 : 3 en sus formas equivalentes puede ser 4 : 6, 6 : 9 o 8 : 12 y así consecutivamente, en donde cada una se obtiene al multiplicar un factor de multiplicación con 2 : 3 o por agrupación común. Lo opuesto sería obtener la forma simplificada de 2 : 3 de la misma manera.
Dos razones con: a) una diferencia constante b) un total fijo c) una cantidad que no cambia d) cantidades que cambian	El concepto de antes y después como en la razón hombres : mujeres en un principio era 3 : 2, y la razón se convirtió en 4 : 3 después (para más ejemplos, refiérase a la Tabla 10-6).

El término de 'relación multiplicativa' entre dos cantidades se presentó en párrafos anteriores. ¿Qué significa este término? Los alumnos tienden a confundir la relación multiplicativa de las razones con la comparación aditiva. En el ejemplo anterior de las barras de chocolate X e Y, los alumnos pueden verlo como X - Y para obtener la diferencia del largo. Una manera sencilla de distinguir entre las comparaciones multiplicativas y aditivas es utilizar los gráficos lineares que se muestran en las Ilustraciones 10-1 y 10-2.

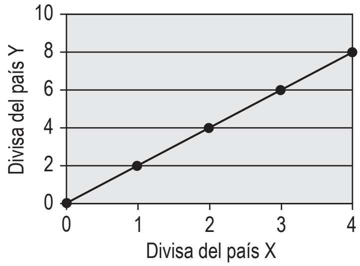


Ilustración 10-1 Tasa de cambio

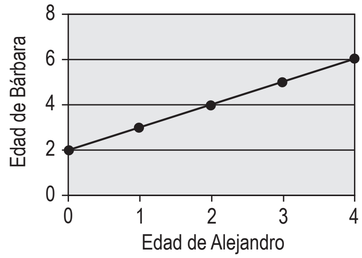


Ilustración 10-2 Edad de Alejandro y Bárbara

En la Ilustración 10-1 se indica la tasa de cambio de divisa entre el país X y el país Y. En el gráfico de línea, la recta pasa por el origen, y la relación entre los valores de la divisa del país X respecto al país Y es $y = 2x$. Lo inverso sería $x = \frac{1}{2}y$. Esto demuestra que existe una relación multiplicativa. Sin embargo, en la ilustración 10-2, vemos que Bárbara es dos años más grande que Alejandro. Al expresar el valor de y en referencia a x en cualquier punto en el gráfico, no obtenemos un valor constante, lo que sugiere que la relación numérica es una suma constante (la edad de Bárbara = la edad de Alejandro + 2) en vez de un factor multiplicativo constante.

El uso de unidades discretas y medidas continuas permite que los estudiantes/profesores vean la diferencia entre las unidades relativas y absolutas. Si la razón del número de círculos en relación con el número de cuadrados es 4 : 8, las agrupaciones en pares resultarán en 2 : 4, y las agrupaciones de a cuatro resultarán en 1 : 2, como se muestra en la Ilustración 10-3. Las agrupaciones basadas en una unidad en común sugieren que los números absolutos no se pierden, sino que más bien se agrupan.

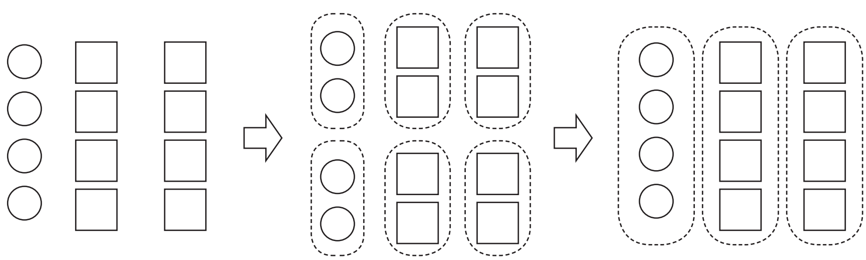


Ilustración 10-3 Agrupaciones basadas en una unidad común

El otro aspecto, que se basa en el uso de mediciones continuas, sirve para determinar cuántas veces un valor es tan grande como otro según la razón entre ellos, y viceversa. Por ejemplo, en la Ilustración 10-4, la razón del largo de la vara A en relación con la vara B es 8 : 4 o 2 : 1, y la vara A es dos veces más larga que la vara B.

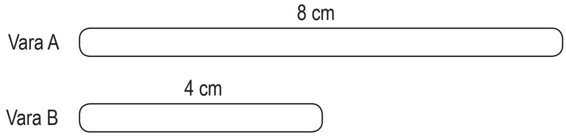


Ilustración 10-4 Mediciones contínuas

Algunos ejemplos de razones y pensamiento proporcional en contextos cotidianos

El aprendizaje de razones y proporciones no debería estar destinado solo a resolver problemas de valores incógnitos. En el mundo que nos rodea salen a la luz muchos aspectos de cómo algunas cosas funcionan de acuerdo con algunas reglas proporcionales. En la Tabla 10-3 se entrega una lista de ejemplos de razones y proporciones en uso. Esta lista no es exhaustiva. Los estudiantes/profesores pueden encontrar más ejemplos.

Tabla 10-3 Ejemplos de razones y pensamiento proporcional en contextos cotidianos

Contexto	**Ejemplo**
De compras	\$300 pesos por 1 kg de arroz → \$900 por 3 kg de arroz
Fotocopias	\$25 por copia → \$250 por 10 copias
Producción	10 000 botellas por minuto → 20 000 botellas en 2 minutos
Pagos	\$300 pesos por 45 minutos de estacionamiento → \$600 por 1,5 horas de estacionamiento
Agrandar o reducir	La imagen se agranda/reduce a una escala de 2 del original
Velocidad	Un auto se desplaza a una velocidad uniforme de 60 km/h → avanza 300km en 5 horas
Cocinar	250 g de mantequilla por cada taza de harina → 1 kg por 4 tazas de harina
Consumo	50 km por cada litro de petróleo → 100 km por 2 litros de petróleo
Cambio de divisa	US\$1,00 por cada CLP\$500 → US\$10,00 por CLP\$5000
Relación	Circunferencia y diámetro → $C \div d = \pi$

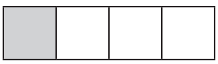
Notación de razones

Para expresar una razón se utilizan dos puntos. Si hay 3 niños por cada 4 niñas, entonces la razón del número de niños con respecto al de niñas es 3 : 4 (se lee: 3 es a 4). Si se invierte el orden, la razón cambia a 4 : 3.

¿Cuándo se aprende la materia de razones?

Cuando los alumnos comparan una parte con otra o con el todo en el tema de 'fracciones', de cierta manera, están aprendiendo sobre razones, aunque no se mencionan explícitamente con los términos de las razones.

Por ejemplo, en la Ilustración 10-5, en las tres preguntas se pide que los niños comparen dos cantidades diferentes de diversas maneras.



1) ¿Qué fracción del entero se ha sombreado?
2) ¿Qué fracción del entero no se ha sombreado?
3) Exprese el número de partes sombreadas como una fracción de las partes no sombreadas.

Ilustración 10-5 Fracción y razón

Para la pregunta (1), $\frac{1}{4}$ del entero sombreado es igual que la razón del número de unidades sombreadas en relación con el número total de unidades, es decir, 1 : 4. De manera similar, la respuesta $\frac{3}{4}$ en la pregunta (2) se puede ver como 3 : 4, mientras que en la pregunta (3) se trata de elucidar si se entiende que es posible comparar partes separadas como "sombreadas" y "no sombreadas", así $\frac{1}{3}$ sería 1 : 3.

Cuando los alumnos aprenden acerca de las fracciones equivalentes, lo que hacen realmente es trabajar con proporciones como $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Aquí también queda en evidencia la relación multiplicativa. El valor de la razón en este caso es igual.

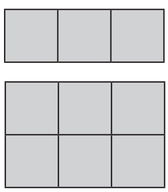
Aparte de las fracciones, también existen otros precursores conceptuales de las razones que los alumnos ven cuando estudian otros temas. Cuando estudian los decimales, los alumnos también aprenden acerca de las razones, pues los decimales son otra manera de representar las fracciones. Por ejemplo, 0,3 es la notación para la razón de 3 de 10. Al proyectar esta razón, vemos que 0,3 es también 30 de 100 o 300 de 1000 y otras similares.

Hay tres botones en una fila.
a) ¿Cuántos botones hay en 2 filas?
b) ¿Cuántos botones hay en 5 filas?

Ilustración 10-6 Multiplicación y razón

En la Ilustración 10-6, también podemos ver que cuando los alumnos aprenden acerca de la multiplicación, de cierto modo están aprendiendo acerca de razones y proporciones.

Para responder a la pregunta (a), vemos que 1 fila corresponde a 3 botones, por lo que 2 filas corresponderían a 2 × 3 para obtener 6 botones. De manera similar, (b) 5 filas serán 5 × 3 para obtener 15 botones. El mismo razonamiento y conocimientos utilizados para responder a las preguntas de multiplicación se puede utilizar en el área de temas que se muestra en la Ilustración 10-7. Esto implica que aprender acerca de razones y proporciones no se debería tratar como un tema aislado. El conocimiento que los alumnos ya poseen debería utilizarse para ayudarles a que vean las conexiones entre los conceptos.



Cada cuadrado es una unidad de cuadrado.
a) ¿Cuál es el área de la figura a la izquierda?
b) ¿Cuál es el área de la figura cuando se añade otra fila de cuadrados?

Ilustración 10-7 Área y razón

Otros temas en el plan de estudio para la educación básica que se abordan en la misma área de estudio que las razones y proporciones serían las razones y los porcentajes, pues sus conceptos se relacionan de cerca con los anteriores.

Algunas diferencias entres las razones y las fracciones

Se tiende a considerar que las fracciones son iguales a las razones. A pesar de que sí se puede decir que las fracciones son razones, lo opuesto no es siempre cierto. En la Tabla 10-4 se muestran algunas diferencias entre los dos.

Tabla 10-4 Algunas diferencias entre razones y fracciones

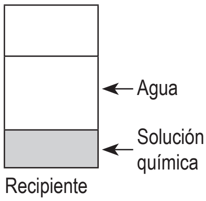
Razón	Fracción
Sirve para comparar elementos distintos (es decir, muestra la comparación de la parte por la parte). Por ejemplo: 3 manzanas respecto a 4 balones de fútbol.	Sirve para comparar elementos similares (es decir, muestra comparaciones de la parte por el todo) Por ejemplo: 3 de 4 botones son rojos
Puede sumar razones Por ejemplo: Alexis tiene 2 bolitas rojas y 3 bolitas azules. Su amigo le dio 2 bolitas rojas y 3 bolitas azules adicionales. Por ejemplo: 2 : 3 + 2 : 3 = 4 : 6	No puede sumar denominadores Por ejemplo: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
Muestra una relación multiplicativa Por ejemplo: por cada 2 bolitas rojas, hay 3 bolitas azules.	Muestra una cantidad dividida Por ejemplo: toda la cantidad se divide en partes equitativas, $\frac{2}{3}$ significa un conjunto de 2 partes de un objeto dividido en 3 partes.
No siempre es un número racional Por ejemplo: en un cuadrado, la razón del largo de un lado por la diagonal es $1 : \sqrt{2}$ (lo que significa que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como un cociente de dos números enteros).	Un número racional Existe en la forma $\frac{a}{b}$ en donde a y b son números enteros y $b \neq 0$

Actividades de debate

El estudiante/profesor debe estar consciente de que enseñar matemática, aparte de ser una labor académica, debería cultivar un sentido de la matemática y de los números en los alumnos. El estudiante/profesor debe entender completamente y asimilar lo que significan las 'razones' y cómo encajan dentro del marco de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En las Ilustraciones 10-8a y 10-8b se sugieren ocho actividades de debates que el estudiante de pedagogía/profesor debe considerar. A modo de precaución, estos debates están destinados para que los estudiantes/profesores perfeccionen sus conocimientos de contenido, por lo que se deben modificar si se quieren utilizar en clases con alumnos de educación básica.

Actividad de debate 1

En la imagen se muestra la cantidad de solución química y agua que hay en el recipiente.



a) ¿Qué ocurre cuando se vierte un vaso de agua en el recipiente?
¿Cómo se ve afectada la mezcla?
¿Cómo se ve afectada la razón?

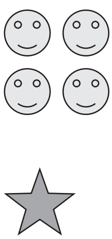
b) Qué ocurre si en vez de un vaso de agua se vierte un tubo de ensayo con sustancias químicas?
¿Cómo se ve afectada la mezcla?
¿Cómo se ve afectada la razón?

Debatir:
¿Cuál cree que es el propósito de presentar los escenarios anteriores a los alumnos?
¿Por qué no se utilizan numerales?
¿Puede extender esta situación o inventar otra?

Ilustración 10-8a

Actividad de debate 2

En las imágenes se muestran 4 calcomanías con caritas felices y 1 calcomanía de estrella.



a) Muestre al menos tres maneras diferentes de comparación con razones.
Complete esta frase inventando una pregunta que un amigo tenga que resolver.

b) Si puede intercambiar 4 calcomanías de caritas felices por una calcomanía de estrella, ...

Debatir:
Explique las ventajas que se pueden ver en la tarea anterior.
¿Qué conceptos clave de razones se pueden establecer en esta actividad?

Ilustración 10-8b

Actividad de debate 3

a) Usted recibe 16 bolitas azules y 24 bolitas verdes. ¿Cómo se puede mostrar que la razón puede ser 2 : 3 y 4 : 6?

b) Usted recibe 2 bolitas azules y 3 bolitas verdes en un lado de la mesa. También recibe 8 bolitas azules y 12 bolitas verdes en el otro lado de la mesa. Utilice dos métodos diferentes para mostrar que las razones de los bolitas azules en relación con los contadores verdes son iguales.

c) Usted recibe 18 bolitas rojos, 10 azules y 6 verdes. Muestre cómo se pueden reagrupar para que ilustren la razón 9 : 5 : 3.

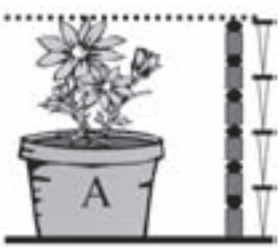
Debatir:

¿Cuáles son las ideas importantes en (a), (b) y (c)?

¿Qué dificultades pueden encontrar los alumnos cuando reagrupan las bolitas?

Ilustración 10-8c

Actividad de debate 4



El macetero A mide 6 fósforos de alto o 4 clavos de alto.

Si tenemos otro macetero B, el cual mide 6 clavos de alto, ¿cuál sería la altura del macetero B en fósforos?

Debatir:

¿Qué ideas claves se cubren en el problema anterior?

¿Qué estrategias se pueden utilizar para resolver el problema anterior?

¿Cómo ayuda este ejercicio a comprender las nociones de razón y proporción?

Fuente: Hart (1984)

Ilustración 10-8d

Actividad de debate 5

Partes del cuerpo	Medición (cm)	Números enteros aprox. (cm)
Cabeza		
Cuello		
Cintura		
Muñeca		
Altura		
Largo de la pierna		
Largo del brazo		
Pie		
Mano		

Pida a los alumnos que se junten en grupos y midan las partes del cuerpo de un amigo. Después se debe encontrar la razón entre las diferentes partes del cuerpo.

a) Identifica dos cantidades para compararlas. Compara diferentes razones similares con otros grupos. ¿Qué se puede decir de las comparaciones?

b) En casa, toma mediciones similares en niños menores de 4 años. ¿Cómo se comparan con las razones de tus compañeros?

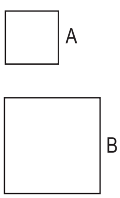
Debatir:

¿Se identificaron patrones interesantes?

¿Cómo se pueden utilizar los patrones para hacer predicciones?

Ilustración 10-8e

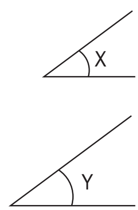
Actividad de debate 6



A la izquierda, el cuadrado A se magnifica 3 veces para obtener el cuadrado B.

A mide 3 cm de largo. ¿Cuánto mide el largo de B?

¿Es el área de B tres veces el área de A?



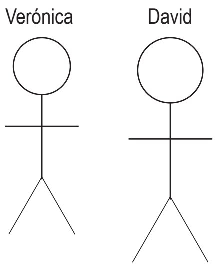
Debatir:

¿Qué idea clave se trata en el ejercicio anterior?

¿Cómo se puede mostrar si el área de B es o no es 3 veces el área de A? ¿Se puede decir lo mismo cuando la figura que muestra el ángulo X se magnifica 3 veces, y que como resultado da la figura que muestra el ángulo Y?

Ilustración 10-8f

Actividad de debate 7



David y Verónica midieron 125 cm y 130 cm de alto respectivamente el año pasado.

Este año, David mide 130 cm y Verónica mide 135 cm de alto.

¿Quién ha crecido más?

Debatir:

¿Se trata el ejercicio anterior de razones?

Supongamos que existen otras maneras de explicar el ejercicio anterior, ¿serían útiles?

Ilustración 10-8g

Actividad de debate 8

Problema

Verónica tenía bolitas grandes y pequeñas, las bolitas grandes respecto a las pequeñas se encontraban en una razón de 4 : 1. Si Verónica cambió 40 bolitas grandes por 20 bolitas pequeñas con su amigo, ella quedaría con la misma cantidad de bolitas grandes y pequeñas. ¿Cuántas bolitas tenía Verónica en un principio?

Explique cómo utilizaría los pasos de resolución de problemas de Polya para resolver este problema.

Pasos de resolución de problema de Polya:

a) Comprender el problema
b) Idear un plan
c) Ejecutar el plan
d) Revisar lo realizado

Debatir:

Compare su estrategia con aquella de su colega o colegas.

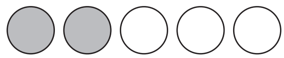
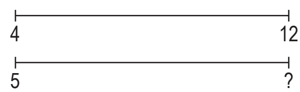
¿Cuáles son los diferentes enfoques y qué tan eficaces son? ¿Solo hay una solución?

Ilustración 10-8h

Dificultades de aprendizaje y errores generales

En la tabla 10-5, vemos algunas dificultades de aprendizaje que los alumnos enfrentan y errores que cometen.

Tabla 10-5 Errores comunes

Tipo de error	Ejemplo
A algunos alumnos les cuenta expresar las razones con la relación parte-todo.	 Cuando se les pide una razón con una relación parte-todo (por ejemplo, parte sombreada y entero), los alumnos tienden a dar responder 2 : 3 en vez de 2 : 5. Los alumnos tienden a considerar el diagrama anterior como dos conjuntos separados; un conjunto sombreado, el otro no sombreado.
A algunos alumnos les cuenta expresar las razones parte-parte.	En un curso de 40 alumnos, 17 de ellos portan lentes ópticos. Cuando se les pide que encuentren la razón entre el número de alumnos que usan lentes y aquellos que no usan lentes, la respuesta incorrecta común es 17 : 40.
A algunos alumnos les cuesta obtener las razones equivalentes.	5 : 4 = ? : 12 Los alumnos tienden a asociar el par anterior de números a pares en una recta numérica como la que se muestra a continuación.  Como el 'espacio' entre 4 y 12 es 8, suman 8 a 5 para encontrar el valor incógnito. La respuesta incorrecta común es 13. Por lo tanto, los alumnos comparan las cantidades diferenciado más que identificando una relación de multiplicación.
A algunos alumnos les cuesta combinar razones.	X : Y = 2 : 3 y Y : Z = 4 : 5 Aunque algunos alumnos pueden llegar correctamente a que Y es 12 unidades (12 unidades menores que derivan de 3 x 4), después no saben qué hacer con el 12. No saben ver que las unidades pequeñas se pueden reagrupar para cumplir con X y Z.

También existe la noción errónea y común de que cuando una razón equivalente se simplifica, la razón simplificada muestra los valores absolutos que se comparan. Por ejemplo, 4 bolitas negras por cada 2 bolitas blancas se escribe 4 : 2, que en su forma simplificada se transforma en 2 : 1. Algunos alumnos tienden a pensar que ahora hay 2 objetos por cada 1 objeto. El aprendizaje de reglas puede haber contribuido a la idea de que como el factor en común es 2, la división es por 2. Los alumnos, por lo tanto, deben entender que en valores equivalentes, el número de elementos no desaparece cuando se presenta su forma simplificada. Sigue habiendo 4 objetos por cada 2 objetos. Solo se han agrupado en relación a una unidad en común, como 2 grupos de 2 y 1 grupo de 2, como se ve en la Ilustración 10-9.

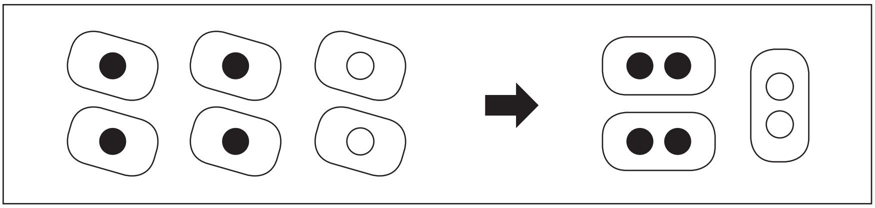


Ilustración 10-9 Valores relativos de las razones

Para explicar utilizando la notación de razones, simplemente significa que:

(4 grupos de 1) : (2 grupos de 1) = (2 grupos de 2) : (1 grupos de 2).

El estudiante/profesor debería recordar que cuando se enseñan las fracciones equivalentes, se debe aplicar el mismo principio. Un buen punto a considerar con los alumnos es preguntarles que si 12 : 6 se reduce a 2 : 1, entonces ¿qué ha ocurrido entonces con las otras 10 y 5 bolitas respectivamente, si se consideran las cifras como valores absolutos?

Enfoques pedagógicos

Como las razones no se presentan formalmente hasta que los alumnos están en quinto año de enseñanza básica, debería utilizarse el conocimiento que ya poseen sobre fracciones, multiplicación y área para enseñar el concepto de razón. Para ayudar a los alumnos a entender el concepto de razón, se deben utilizar situaciones de la vida real como oportunidades para conversar e integrar las experiencias que se relacionan con las razones y proporciones. Hablar sobre estas experiencias permitirá que los alumnos vean el significado y utilidad de las relaciones entre las cantidades, además de perfeccionar su razonamiento proporcional.

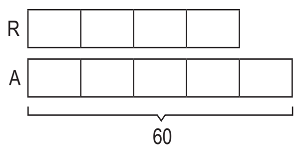
Es primordial utilizar materiales concretos para ayudar a los alumnos a entender la comparación entre cantidades y mostrar cómo las cantidades se pueden agrupar en relación a una unidad en común. También se deberían utilizar materiales concretos para ayudar a los alumnos a reconocer lo que representa cada número en una razón, por ejemplo, en las relaciones de parte-todo, parte-parte o todo-parte. El método de modelos también es una herramienta útil pues entrega una manera ordenada y sencilla para resolver problemas verbales de razones, sean complejos o sencillos.

Estrategias para resolver problemas de razones básicos

En la Ilustración 10-10 se presentan cuatro estrategias que se pueden utilizar para resolver el problema de enunciado que se presenta a continuación. Estas estrategias se pueden adaptar dependiendo de cuál de las variables es la incógnita.

- La razón del número de flores rojas y amarillas es 4 : 5. Si hay 60 flores amarillas, ¿cuántas flores rojas hay?

Método de modelo (incluye el método unitario)



5 unidades → 60
1 unidad → 12
4 unidades →12 x 4

Factor multiplicativo o fracciones equivalentes

5 × 12 = 60
Entonces, 4 × 12 = 48

$$\frac{4}{5} \overset{\times 12}{=} \frac{1}{60} \quad (\times 12)$$

Tabulación

A	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
R	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48

Multiplicación cruzada (para alumnos más informados; la multiplicación cruzada se verá en la educación media)

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{60} \rightarrow x = \frac{4}{5} \cdot 60 = 48$$

Ilustración 10-10 Estrategias

Preguntas de evaluación

Por lo general, a la mayoría de los alumnos no les cuesta responder preguntas de evaluación básicas sobre razones. Al momento de resolver problemas o preguntas básicas de razones, los alumnos deberían ser capaces de utilizar cualquiera de las estrategias que se mencionaron en páginas anteriores. Los alumnos tienden a encontrar dificultades cuando los problemas de razones se integran a temas como fracciones, porcentajes o, por lo general, cuando se trata con dos pares de razones.

En esta última sección se destacan algunos problemas verbales de razones que son más difíciles, los que se enmarcan en diversas situaciones (tabla 10-6). Además, se incluyen algunos problemas de enunciado que se han adaptado de aquellos que han aparecido en exámenes (tabla 10-7). Se alienta a que los estudiantes de pedagogía/profesores piensen en lo siguiente:

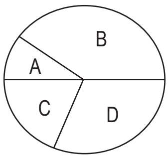
a) Las dificultades que los alumnos pueden encontrar.
b) Las nociones erróneas que los alumnos puedan tener.
c) Las estrategias que los estudiantes de pedagogía/profesores pueden utilizar para ayudar a que los alumnos entiendan y resuelvan los problemas.

Tabla 10-6 Problemas de razones con dos razones

Tipo de estructura	**Poblema con dos razones**
• Una cantidad no cambia	Al principio de un juego, la razón del número de sus bolitas rojas y azules de Juan era 3 : 1. Durante el juego, perdió 20 bolitas rojas y la razón quedó en 2 : 1. ¿Cuántas bolitas rojas tenía en un principio?
• Dos cantidades • Total no cambia	La razón del número de bolitas de Juan en relación a las de Alejandro era 3 : 2. Si Juan tenía 42 bolitas, ¿cuántas bolitas le debería dar Juan a Alejandro para que la razón quede en 3 : 7?
• Dos cantidades • Diferencia en común no cambia	Beatriz y Carla tenían algunas bolitas en la razón de 5 : 7. Cada una ganó 15 bolitas en un juego y la razón se transformó en 3 : 4. ¿Cuántas bolitas tenían al principio?
• Dos cantidades cambian	Juan tenía el mismo número de bolitas rojas y azules al principio. Durante un juego, perdió 10 rojas y 36 azules y la razón del número de rojas en relación a las azules pasó a ser 3 : 1. ¿Cuántas bolitas rojas tenía en un principio?

Tabla 10-7 Problemas de razones (modificados) que se utilizan en exámenes

Problema 1



El círculo se divide en 4 partes en donde A y B forman un semicírculo.
Las áreas de A y B están en la razón de 4 : 7. Las áreas de C y D están en la razón de 1 : 2.

a) ¿Qué fracción de todo el círculo es la parte A?

b) La parte B es más grande que la parte A por 15 cm^2.
Encuentra el área de todo el círculo.

Problema 2

Melisa tiene un cajón con peluches. En el cajón hay osos, muñecas y dinosaurios. La razón del número de osos en relación con el número de muñecas es 5 : 2. La razón del número de muñecas en relación al número de dinosaurios es 1 : 4. ¿Cuál es la razón del número de dinosaurios en relación al número total de muñecas y dinosaurios?

Problema 3

Alejandro, Beatriz y Carlos compartieron algunas calcomanías en la razón 4 : 2 : 5.

a) ¿Qué fracción de las calcomanías corresponde a la parte de Carlos?

b) Alejandro dio $\frac{3}{8}$ de sus calcomanías a Beatriz, y Beatriz ahora tenía 18 calcomanías más que Alejandro.

¿Cuántas calcomanías tenía Beatriz después de recibir las otras?

Problema 4

Miguel tenía un total de 192 bolitas azules y verdes en una razón de 7 : 5. Después de que regaló la misma cantidad de cada tipo de bolitas, las bolitas azules y verdes que le quedaban estaban en una relación de 7 : 3.

a) ¿La fracción de las bolitas azules aumentó, disminuyó o se mantuvo igual después de que Miguel regaló algunas bolitas?

b) ¿Cuántas bolitas regaló en total?

Problema 5

Miguel puso algunas bolitas azules y rojas en dos bolsas, X e Y. En la bolsa X, el número de bolitas azules y rojas estaba en una razón de 3 : 4. En la bolsa X, hay el doble de bolitas azules que rojas. Miguel transfirió la mitad de las bolitas rojas de la bolsa X a la bolsa Y. El número de bolitas en la bolsa X llegó a 75 y la razón del número de bolitas azules en relación a las rojas en la bolsa Y quedó en 1 : 2. ¿Cuántas bolitas había en la bolsa Y después de la transferencia?

Referencias

Billings, E. M. H. (2001). Problems that encourage proportional sense, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(1), 10-14.

Cai, J. y Sun, W. (2002). Developing students' proportional reasoning: A Chinese perspective. En B. Titwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportion, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de matemática.

Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (2007). *Mathematics syllabus-primary*. Singapur: Ministerio de Educación.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: Nfer-Nelson Publishing Company.

Fuentes de lectura complementaria

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance J. H. & Besuk, N. S. (2003). *Learning mathematics in elementary and middle schools*. (3ra ed.). Nueva Jersey: Merrill-Prentice Hall.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher*, 40(6), 342-346

Fong, H. K., Ramakrishnan C. & Gan, K. S. (2005). *My pals are here! Maths 5A*. Singapur: Federal-Marshall Cavendish Education.

Koay, P. L. y Lee, N. H. (2005). *Shaping maths: Teacher's resource pack 5*. Singapur: Federal-Marshall Cavendish Education.

Polya, G. (1975). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. (2da ed.). Garden City, NY: Doubleday.

Post, T. R. (Ed.). (1998). T*eaching mathematics in Grades K-8*. Research based methods. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Capítulo 11
La enseñanza de mediciones

Koay Phong Lee

Introducción

¿Qué es medir?

> *Comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera. (Diccionario de la Real Academia Española)*

Todas las mediciones implican comparaciones. Las palabras tales como alto o pesado obtienen un significado cuando se relacionan con objetos que tienen los mismos atributos. Cuando medimos, tenemos que:

1. Decidir el *atributo* del objeto que queremos medir.
2. Seleccionar la unidad adecuada con la cual medir el atributo.
3. Utilizar la unidad de forma repetida y contar *cuántas veces* se utiliza para medir el atributo.

Actividad 1

- Haga una lista de los atributos que se pueden utilizar para describir un objeto.
- ¿Cómo decide si los atributos se pueden medir?

¿Por qué es importante aprender a medir en el currículo?

La medición se puede aplicar de muchas maneras en la vida diaria.

- Ayuda a los niños a aprender otros aspectos de la matemática (por ejemplo, fracciones y área).
- La medición se relaciona con otras áreas del currículo escolar (por ejemplo, los estudios sociales, la ciencia y la educación física).
- Cuando los niños aprenden a medir, participan de manera activa en el aprendizaje y la resolución de problemas.

Actividad 2

De ejemplos de cómo la medición se puede utilizar en la vida diaria y en el aprendizaje de otras asignaturas escolares.

Actividad 3

Examine el plan de estudios de matemática para encontrar lo siguiente:
- Los atributos que se enseñan
- El nivel de año escolar en el que se presenta el atributo
- Cómo el atributo se presenta en los libros escolares

Actividad 4

Explique la diferencia entre los siguientes atributos:
- Masa y peso
- Volumen y capacidad

Fundamentos de la medición

Los tres principios

Para tomar mediciones precisas y con sentido, los niños tienen que entender estos tres principios:
- Conservación
- Transitividad
- Repetición de unidad

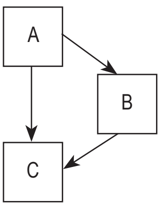
Conservación

Un niño que conoce la importancia de la conservación se dará cuenta que la reposición y la partición (en algunas maneras) de una cantidad no afectan la cantidad (por ejemplo, un cable de un metro de largo todavía es del mismo largo si se dobla, o el volumen de una bebida todavía es de 330 ml, aun cuando la lata se vacíe en un vaso alto y delgado, o en un tazón). Entre los argumentos que los niños dan para explicar por qué una cantidad no cambia después de la transformación puede estar la reversibilidad, la identidad y la compensación. Los niños apreciarán la idea de la conservación con el paso del tiempo y la experiencia.

Actividad 5

- De otro ejemplo que ilustre la conservación de la longitud.
- De otro ejemplo que ilustre la conservación de la masa.

Transitividad



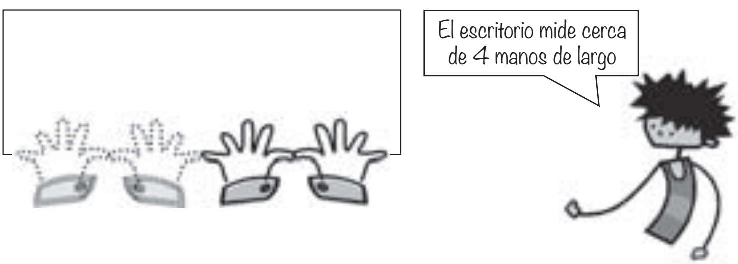
Siempre que se comparan dos objetos o eventos utilizando los atributos de medición, tales como la longitud, la masa, el volumen o el tiempo, se puede decir que A se relaciona con C si A está relacionada con B y B con C.
La relación puede ser ‘más largo que’, ‘más ligero que’, ‘más tarde que’, etc. Estas relaciones poseen la propiedad transitiva, como se ilustra en el dibujo.

Actividad 6

Explique por qué comprender el principio de transitividad es importante para que los niños entiendan la medición.

Repetición de unidades

La repetición de unidades se refiere al uso repetido de una unidad única de medición para encontrar una medida.



Actividad 7

Identifique algunos de los errores que los niños podrían cometer cuando aplican el principio de repetición de unidad a la medición de longitud.

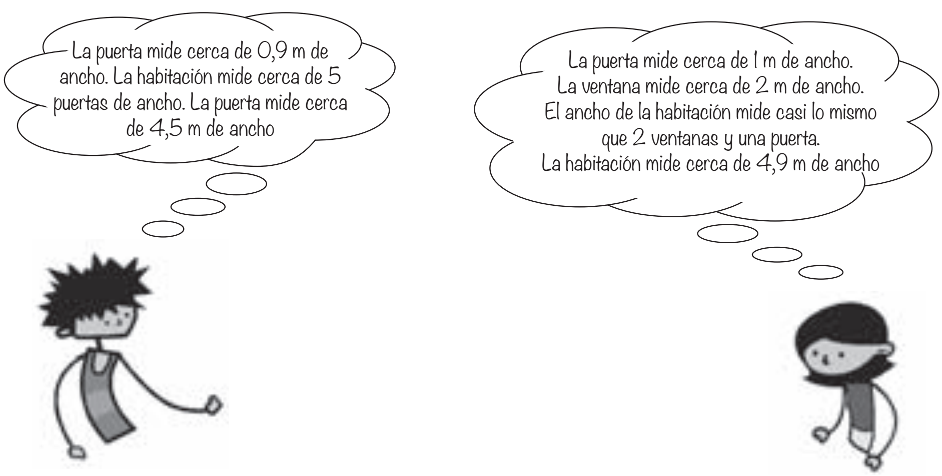
Estimación de las mediciones

Todas las mediciones corresponden a aproximaciones, pues siempre hay una unidad más pequeña (en teoría) que puede dar una medida más precisa. Además, los objetos que se miden usualmente no están bien definidos y siempre existe un error cuando se lleva a cabo la medición (es decir, un error de medición).

La estimación debe formar parte de las actividades donde se tenga que medir. Se debe alentar a todos los niños a que hagan suposiciones, las modifiquen, y las vuelvan a formular una y otra vez. Si se les da varias oportunidades para que practiquen, sus estimaciones pueden llegar a ser bastante cercanas. Van de Walle (2004) menciona cuatro estrategias hacer estimaciones en la medición:

- Crear y utilizar puntos de referencia o referentes para las unidades importantes.
- Utilizar agrupación cuando sea necesario.
- Utilizar sub-divisiones.
- Repetir una unidad mental o físicamente.

El autor indica que se pueden enseñar todas estas estrategias a los alumnos.



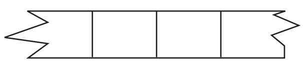
Incluir la estimación en las actividades de medición ayuda a los niños a enfocarse en los atributos que se están midiendo y en el proceso de medición. La estimación entrega una motivación intrínseca a medida que los niños mejoran sus presunciones. También les ayuda a familiarizarse con la unidad que se utiliza. El uso de las estrategias de estimación ayuda a los niños a ejercitar el razonamiento multiplicativo.

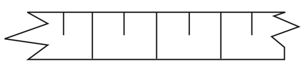
Precisión y errores de medición

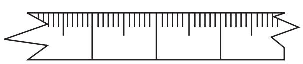
Actividad 8

- Materiales que se necesitan: 2 reglas de papel para cada pareja de participantes.

  Actividad: medir el ancho de esta mariposa utilizando reglas diferentes.

Si se usa a)  el largo es ____________

Si se usa b)  el largo es ____________

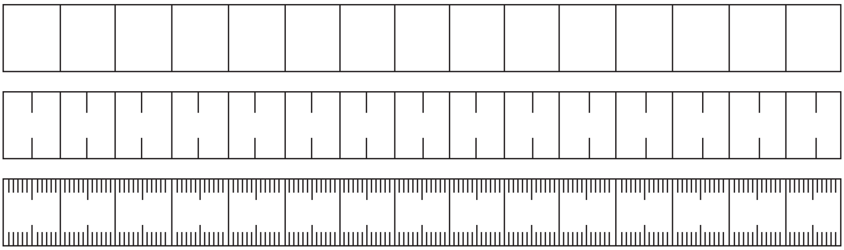
Si se usa c)  el largo es ____________

1. ¿Qué da una medición más precisa?
2. Explique por qué la partición es tan importante en la medición.
3. Mientras más pequeñas sean las sub-unidades que se utilizan para medir, se necesitan ____________de esas sub-unidades. Mientras más grandes sean las sub-unidades que se utilizan para medir, se necesitan ____ de esas unidades.

¿Por qué es tan importante que los niños comprendan este principio?

Actividad 8 (continuación)

Reglas

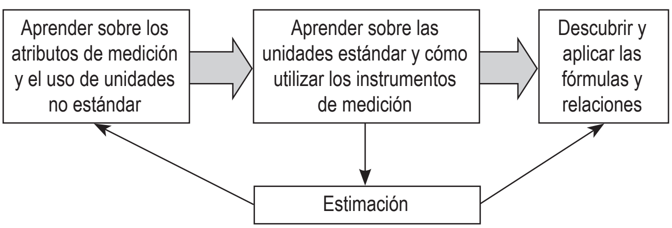


La precisión de una medición depende del tamaño de la unidad de medición más pequeña. El máximo posible de *error de medición* es la mitad del tamaño de la unidad de medición. Por lo tanto, mientras más pequeñas sean las particiones del instrumento de medición, más precisa será la medición.

No obstante, la unidad más pequeña puede resultar ser poco conveniente como medida para una cantidad. Por lo general, se prefieren algunas unidades por sobre otras en ciertas situaciones de medición. Por ejemplo, el kilómetro no es una unidad útil para medir el largo de una sala, y los metros cuadrados no son una buena unidad para medir el área del territorio de Singapur.

La enseñanza de las mediciones

El siguiente diagrama es una secuencia pedagógica para la enseñanza de cualquier sistema de medición.



El foco de la primera etapa es comprender y enseñar los atributos y el vocabulario que se asocia con estos conceptos. Los niños aprenden a utilizar unidades no estándar para comparar atributos. En la segunda etapa, los niños aprenden sobre unidades estándar, a utilizar los instrumentos de medición de forma correcta y a seleccionar la unidades apropiadas para medir y comparar objetos. En la última etapa, se enfatiza el 'descubrimiento' de las fórmulas y las relaciones entre dos atributos. Se debe alentar a los niños a realizar estimaciones en las tres etapas.

Para aprender a medir, los niños tienen que participar con ahínco en el proceso de aprendizaje. Por lo tanto, las clases sobre medición deberían basarse en actividades o en problemas.

Dificultades de aprendizaje

Las dificultades que los niños presentan a la hora de aprender a medir son las siguientes:

- *Falta de comprensión de las ideas de conservación y transitividad*

Actividad sugerida

Organizar actividades prácticas de medición, a fin de promover la comprensión de la conservación y la propiedad de transitividad. Las actividades también deberían incluir las comparaciones de los atributos de los objetos que están siendo medidos.

- *Falta de comprensión con respecto al atributo que se está midiendo*

Esta falta de comprensión sobre el atributo que se está midiendo, por lo general, lleva a los niños a utilizar la fórmula incorrecta.

Ejemplo

Encuentra cuánto mide el lado del cuadrado.

Área $= 16\ cm^2$

El lado del cuadrado = 16 ÷ 2 = 8 cm

Actividad sugerida

Deje que los niños utilicen cuadrados como unidad para formar cuadrados más grandes y registre las áreas y los largos en una tabla como la que se presenta a continuación.

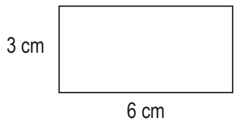
Cuadrados	A*	B	C	D	E
Área	4	9	16	25	36
Lado del cuadrado	2	3	4	5	6

*Dado que $\sqrt{4}$ tiene el mismo valor que 4 divido en 2, es mejor no utilizar este valor.

Hay que lograr que los niños vean que el lado del cuadrado es una raíz cuadrada y no la mitad del área de medición.

Ejemplo

Encuentra el perímetro del rectángulo.



Perímetro = 6 × 3 = 18 cm

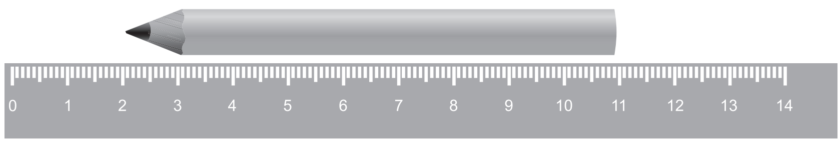
Actividad sugerida

Señale que el perímetro es el largo total del rectángulo. Pida a los niños que utilicen sus dedos para trazar la figura del rectángulo. Pida a los niños que digan en voz alta la medida de cada lado y el largo total. Repita la misma estrategia con otros rectángulos.

- *No sabe cómo utilizar la herramienta de medición*

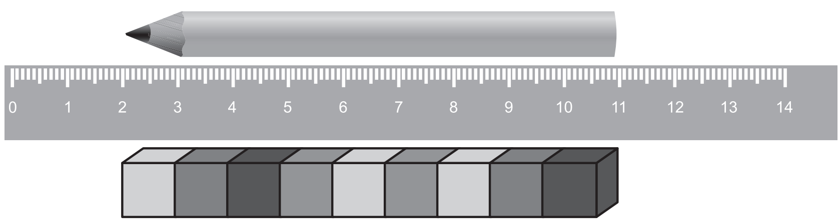
Ejemplo

Utilizar una regla. El lápiz tiene 9 cm de largo.



Actividad sugerida

Pida al alumno que mida el cubo de unidad (1 cm) y utilice los cubos de unidad para formar el largo del lápiz. Pídale que indique el largo de la fila de cubo de unidades y, por lo tanto, que indique el largo del lápiz. Acto seguido, coloque los cubos y el lápiz a lo largo de la regla.

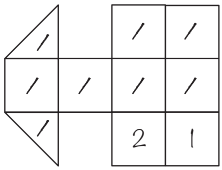


Muestre cómo las unidades (cm) se cuentan con la regla.
Finalmente, pida al alumno que mida los objetos con una regla rota.

- *Falta de comprensión con respecto a las mediciones*

Ejemplo

Encuentra el área de la figura en centímetros cuadrados.



Área = 10 cm^2

Actividad sugerida

Entregue a los alumnos cuadrados de 1 cm y tijeras. Pida a los alumnos que utilicen los cuadrados para cubrir la figura. Pida que describan cómo la figura se puede cubrir, cuántos cm cuadrados se pueden utilizar y a qué área de la figura corresponde. Repita esto con otras figuras.

- *Énfasis excesivo en las pistas numéricas*

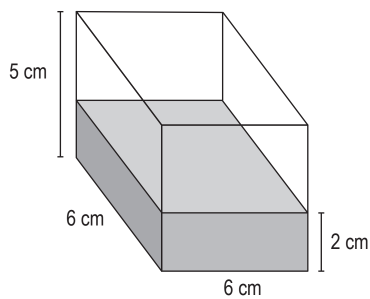
Los niños, por lo general, creen que tienen que utilizar en la tarea toda la información numérica que se les entrega. Esto revela una falta de comprensión relacional de la fórmula.

Ejemplo

Encuentra el volumen del agua en el tanque.

Volumen = $5 \times 4 \times 6 \times 2$

= 240 cm^3



Actividades sugeridas

1. Pida a los alumnos que utilicen los cubos de unidad para formar diferentes ortoedros. Para cada ortoedro, el niño tiene que indicar el largo, el ancho y el alto, y determinar el volumen contando los cubos. Utilice la inducción para lograr que el alumno extraiga la fórmula en el volumen del ortoedro.
2. Pida al niño que explique cómo se puede determinar el volumen de un ortoedro y cuáles son las medidas que se tienen que saber. Pida a los alumnos que miren la parte sombreada para identificar el sólido y sus dimensiones. Permita que siga para encontrar el volumen.

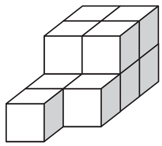
- *Falta de la capacidad de visualización*

  Los niños no son capaces de visualizar los objetos escondidos (línea, cara o cubo) en un diagrama.

  Ejemplo

  El sólido se compone de cubos de 2 cm. Encuentre el volumen del sólido.

  Volumen $= 9 \times 2 \times 2 \times 2$
  $= 72\ \text{cm}^3$

  Actividad sugerida

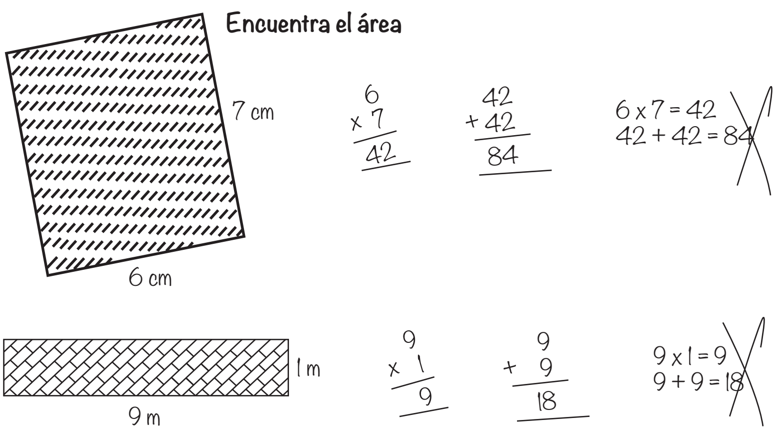
  Pida a los alumnos que utilicen los cubos de unidad para construir el sólido capa por capa, con el objeto de que se den cuenta de que hay cubos bajo los cubos que están a la vista. Pida a los alumnos que calculen el volumen del sólido. Repita la actividad utilizando distintas figuras, variando el número de niveles y la orientación del sólido.

Actividad 9

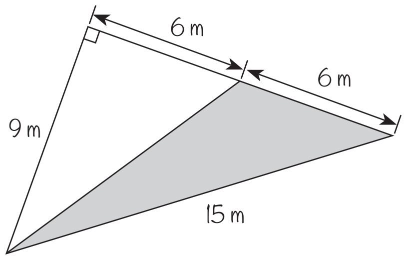
Para cada una de las siguientes actividades:

- describa el proceso de razonamiento que se necesita para la tarea.
- describa el proceso de razonamiento que se puede observar en los niños.
- sugiera una estrategia correctiva adecuada.

Alumno A:



Alumno B:



Área del triángulo

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 9$

$= 108 \div 2$

$= 54\ m^2$

El área del triángulo es $54\ m^2$.

Los recursos

Entre los recursos que se indican aquí se incluyen materiales didácticos y libros infantiles.

Atributos	Materiales didácticos	Libros infantiles
Largo/ perímetro	• Clips, elásticos, bombillas y cuerdas • Reglas y cintas de medición	• *How Big Is a Foot?* (¿Qué tan grande es un pie?)
Masa	• Cubos de unidades, bolitas y monedas • Pesas de cocina y balanzas	• *Who Sank the Boat?* (¿Quién hundió el bote?)
Volumen/ capacidad	• Cubos y contenedores de distintos tamaños • 1 regla de 2 metros, cubos en cm y cubetas y probetas de medición	
Área	• Bloques de patrones, papel cuadriculado y papeles isométricos • Cuadrados de 10 cm por 10 cm y cuadrículas en cm	• *Spaghetti and Meatballs for All* (Tallarines y albóndigas para todos) • *Sir Cumference and the First Round Table* (El rey Circunferencia y la primera mesa redonda)
Tiempo	• Reloj de arena • Relojes	• *What's the Time, Dracula?* (¿Qué hora es, Drácula?) • *Clock and More Clocks* (Relojes y más relojes) • *Pigs on a Blanket* (Cerditos sobre sábanas)

Algunos enfoques de enseñanza

Las siguientes son sugerencias de distintos enfoques para enseñar temas de medición. El primer enfoque implica el uso de libros infantiles para ayudar a los niños a darse cuenta de que las unidades estándar son necesarias. El segundo enfoque implica el uso de materiales didácticos para ayudar a los niños a descubrir la fórmula para obtener el volumen de un ortoedro. El tercer enfoque considera a los niños utilizando applets para explorar la relación entre el perímetro y el área de las figuras. Todos los enfoques se basan en actividades.

Utilizar libros infantiles.

Materiales que se necesitan:

- El libro *How Big Is a Foot?* (¿Qué tan gran es un pie?) de Rolf Myller
- Reglas y cintas de medición

Procedimiento:

1. Comience la clase leyendo en voz alta el cuento: '*How Big Is a Foot?*' a la clase. Haga una pausa en la parte de la historia cuando el rey camina alrededor de la reina, quien yace en su cama (tenga presenta que las páginas del libro no se encuentran numeradas).
2. Pregunte: *¿cuál es el largo que debe tener la cama? ¿qué tan ancha debe ser la cama?*
3. Siga con la lectura. Haga una pausa cuando mandan al aprendiz a la cárcel.
4. Pida a los niños que hablen sobre el problema del aprendiz. ¿Qué consejo le daría al aprendiz?
5. Acepte las sugerencias de los niños y siga leyendo el cuento para mostrar a los niños cómo el problema se resuelve en la historia.
6. Hable con la clase sobre la importancia de tener una unidad estándar de medida.
7. Presente el centímetro. Pida a los niños que identifiquen objetos que tengan cerca de un 1 centímetro de largo/ancho. Pase una cinta de medición al niño o niña para que confirme su sugerencia.
8. Entregue a cada pareja de alumnos una cinta de medición (en lo posible, sin marcas de mm). Pídales que midan algunos objetos en la habitación y registre el largo en la hoja de registro. Recorra la sala y verifique que los niños están utilizando las cintas de medición de la forma correcta.

Actividad 10

Lea y examine el libro, sugiera algunas ideas de enseñanza para utilizar el libro cada vez.

'Pigs on a Blanket' (Cerditos sobre sábanas) de Amy Axelrod.

La historia: la familia cerdo quiere ir a la playa en vez de pasar el día frente al televisor. Son solo las 11:30 am cuando el sr. Cerdo sugiere partir. La playa se encuentra a una hora de la casa en auto. Sin embargo, empiezan a aparecer problemas que hace que se atrasen. Cuando ya se encuentran listos para ir a bañarse en el mar, la playa cierra.

Uso de materiales didácticos

Materiales que se necesitan:

- Cubos de unidades
- Hojas de registro

Procedimiento:

1. Pida a los alumnos que trabajen en grupos de tres.
2. Entregue a cada grupo algunos cubos (cerca de 50).
3. Pida a los alumnos que utilicen los cubos para construir y reconstruir ortoedros de distintas dimensiones y completar la tabla.

Ortoedros	Largo	Ancho	Alto	Número de cubos utilizados	Volumen del ortoedro
A					
B					
C					
D					
E					

4. Pida a los alumnos que busquen patrones en la tabla que se muestra anteriormente.
    - Pida a los niños que consideren cómo se relaciona el largo, el ancho, el alto y el volumen.

      Escriba la relación en la tabla.
5. ¿Cuál es el volumen de un ortoedro que tiene 7 unidades de largo, 5 unidades de ancho y 6 unidades de alto?
    - Anote las sugerencias de los niños en la pizarra.
    - Para revisar la respuesta, utilice los cubos de unidad para construir un ortoedro y pida a la clase que cuenten los cubos de unidad que se utilizan.
6. Muestre cómo la fórmula se puede utilizar para calcular el volumen de un ortoedro, de acuerdo con su largo, ancho y alto.

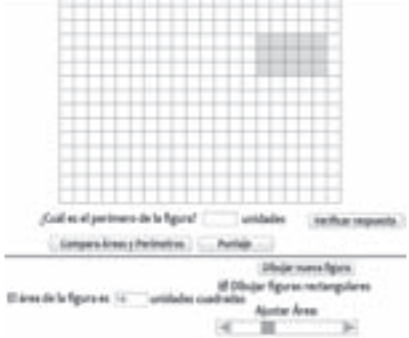
Actividad 11

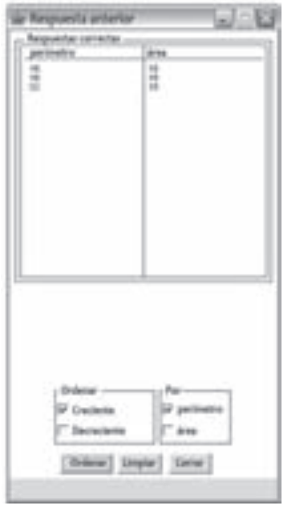
Examine los libros de matemática de educación básica que se utilizan actualmente en las escuelas.

- ¿Cuáles son los dos enfoque comunes para enseñar que el área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}$ × base × altura?
- ¿Qué preguntas haría para guiar a los alumnos hacia la fórmula?
- Compare los dos métodos.

Uso de tecnología

1. Revise el concepto de área y perímetro.
2. Descargue el applet de la *Fundación Educacional de Shodor*. www.shodor.org/interactivate/activities/permarea/index.html
3. Ingrese 15 en el espacio de unidades cuadradas que corresponde al área y seleccione la casilla 'Only Draw Rectangular Shapes' (Solo dibujar formas rectangulares). Pida a la clase que determine el perímetro de los rectángulos. Comente las sugerencias de los niños y muestre cómo revisar las respuestas.





4. Presente el problema: ¿Los rectángulos que tienen la misma área tienen siempre el mismo perímetro?
5. Pida a los niños que trabajen en pares en el computador. Determine un área que los alumnos puedan investigar. Utilice los números 12, 18, 24, 30 o 36.
6. Pida a los alumnos que seleccionen 'Compare Areas and Perimeters' (comparar áreas y perímetros) para revelar la tabla, como la que se muestra a la derecha. Pídales que ordenen las respuestas de acuerdo al perímetro y en orden ascendente.
7. Pida a los niños que examinen la tabla y respondan la pregunta que se presenta en el paso 4.
8. Formule otra pregunta para que los niños investiguen. ¿Los rectángulos que tienen el mismo perímetro tienen siempre la misma área?

Actividad 12

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=6

- Explore el applet que se menciona anteriormente.
- ¿Cómo se puede utilizar el applet para ayudar a los niños a 'descubrir' la fórmula del volumen de un ortoedro?
- Diseñe una hoja de actividades para la clase. Entregue el apoyo necesario para ayudar a los alumnos a que exploren el sitio y lleguen a la fórmula.

Referencias

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Nueva York: Pearson Education Inc.

Fuentes de lectura complementaria

Battitsta, M. T, Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, (Nov.), 503-532.

Burns M. y McLaughlin, C. (1990). *A collection of math lessons from Grades 6 through 8*. Estados Unidos: Math Solution Publications.

Haylock D. y Cockburn, A. (1989). Capítulo 5: Measurement. En *Understanding early years mathematics*. Londres: Paul Chapman.

Outhred L. N. y Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.

Szetela W. y Owens, D. T. (1986). Finding the area of a circle: Use a cake pan and leave out the Pi. *Arithmetic Teacher*, (Mayo), 12-18.

Wilson P. S. y Rowland, R. (1995). Capítulo 8: Teaching measurement. En R. J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics*. Nueva York: Macmillan Pub. Co.

Literatura para niños: lecturas recomendadas

Allen, P. (1996). *Who sank the boat*. Nueva York: Putnam & Grosset.

Ambrus, V. G. (1991). *What's the time, Dracula?* Oxford: Oxford University Press.

Axelrod, A. (1998). *Pigs on a blanket*. Nueva York: Simon & Schuster.

Burns M. (1997). *Spaghetti and meatballs for all: A mathematical story*. Nueva York: Scholastic Press.

Hutchins, P. (1970). *Clocks and more clocks*. Nueva York: Macmillan.

Myller, R. (1991). *How big is a foot?* Nueva York: Dell Pub.

Neuschwander, C. (1997). *Sir Cumference and the first round table: A math adventure*. Watertown, MA: Charlesbridge Publishing.

Hojas de actividades del alumno

En las próximas páginas se entrega una muestra de seis hojas de actividades listas para usar.

1. *Largo (trabajo en grupo)*

   Matemática para medir el cuerpo: Esta actividad permite ejercitar la medición del largo. Los niños tienen que comparar las mediciones de las distintas partes del cuerpo e identificar las relaciones que existen entre ellas.

2. *Masa (trabajo individual)*

   El problema del mono: este es un problema no rutinario sobre la masa. Los niños tienen que explicar cómo obtuvieron la respuesta.

3. *Área (trabajo individual)*

   ¿Tienen las figuras la misma área?: esta es una actividad de desarrollo para el área. Enseña a los niños a la idea de conservación del área.

4. *Área y perímetro (trabajo individual)*

   Las fichas de tangrama: en esta actividad, los niños comparan el área y el perímetro de las fichas de tangrama. Usando un cuadrado pequeño como punto de referencia, tienen que encontrar el área y el perímetro de las otras fichas y formas de las fichas de tangrama.

5. *Volumen (trabajo individual, TIC)*

   La caja con el área más grande: en esta actividad, los niños primero tienen que construir una caja abierta removiendo un cuadrado de cada esquina de una hoja de papel A4. Los alumnos experimentan con cuadrados de diferentes tamaños y luego utilizan una planilla para determinar las dimensiones de la caja (al centímetro más cercano a la centésima) con el volumen más grande.

6. *Tiempo (trabajo en pares)*

   Esta actividad implica situaciones de la vida real. Los niños tienen que entender que el patrón es aproximado y deben utilizar su experiencia para explicar por qué el patrón en el horario no es exacto como un patrón matemático.

Nombre:

Curso: **Fecha:**

Hoja de actividad 1: Largo

Matemática para medir el cuerpo

Materiales que se necesitan:

- Cinta de medir o regla
- Lápiz y hoja de registro
- Miembros de la familia y amigos cooperadores

Instrucciones:

1. Medir a todos los miembros de la familia y amigos que quieran ser voluntarios, incluyéndose a uno mismo.
2. Medir y registrar en centímetros:
   - El perímetro de la cabeza
   - La altura
   - La distancia desde la punta de los dedos de una mano a la otra cuando los brazos están estirados (el "estirón")

Nombre:

Curso: **Fecha:**

Resultados:

Nombre	El perímetro de la cabeza	Alto	Estirón

Preguntas:

1. Compara la altura y la distancia del estirón.
   ¿Qué se puede concluir?

   ....

   ....

2. Compara el perímetro de la cabeza y la altura.
   ¿Qué se puede concluir?

   ....

   ....

3. ¿Qué se puede concluir de la distancia alrededor del puño y el largo del pie? ¿Y de la distancia alrededor de la muñeca y alrededor del cuello?

   ....

   ....

   ....

   ....

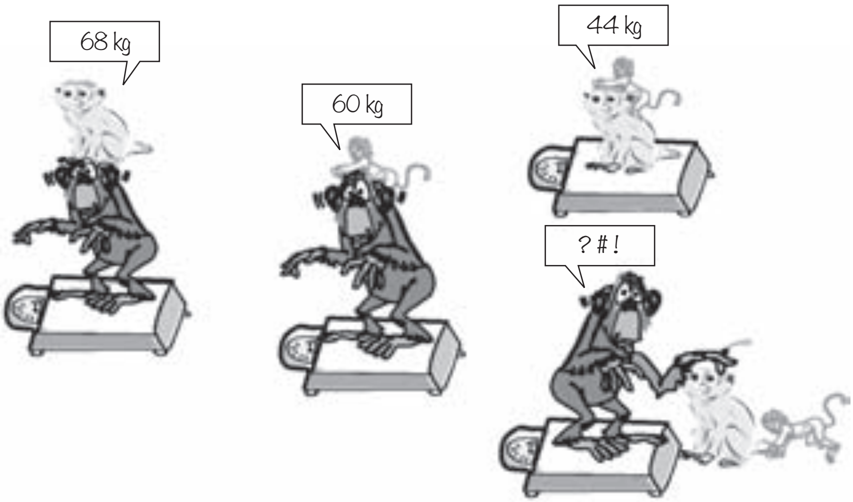
Nombre:

Curso: **Fecha:**

Hoja de actividad 2: Masa

El problema del mono

Encuentra la masa de cada mono.



Fundamenta tu respuesta.

....

....

....

....

....

....

....

Nombre:

Curso: **Fecha:**

Hoja de actividad 3: Conservación de área

¿Tienen las figuras la misma área?

Materiales que se necesitan:

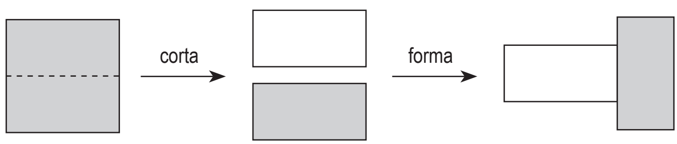
- Tres hojas de papel cuadriculado
- Tijeras

Instrucciones:

1. Cortar tres cuadrados de lado de 10 cm en las hojas de papel cuadriculado.
2. Tomar uno de los cuadrados y doblarlo de esta manera. Cortar donde se haya doblado para obtener dos rectángulos.

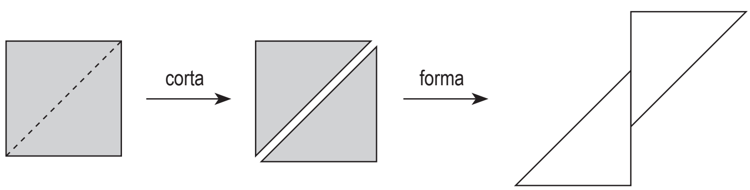
   Utilizar los dos papeles para hacer una figura que no sea un cuadrado. NO poner los papeles uno encima de otro.

   Compara el área de la nueva figura con la del cuadrado.

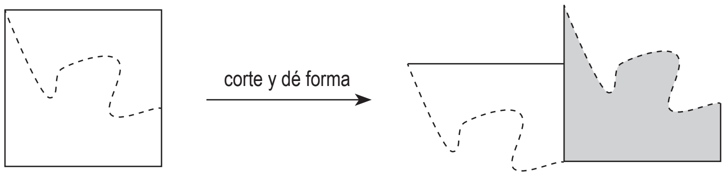


3. Toma otro cuadrado y dóblalo de esta manera. Corta en la parte del doblez. *¿Cuál es la forma de la figura que se obtiene?*

   Utiliza dos papeles para hacer una figura que no sea un cuadrado. Compara el área de la nueva figura con la del cuadrado.



Toma el tercer cuadrado y córtalo como quieras. Arma una figura con los papeles uniéndolos por los lados derechos.



Compara el área de la nueva figura con la del cuadrado.
Cuando uno corta un cuadrado y utiliza los papeles para hacer una figura sin superponer las piezas, el área de la figura que se forma es ________________ al área del cuadrado.

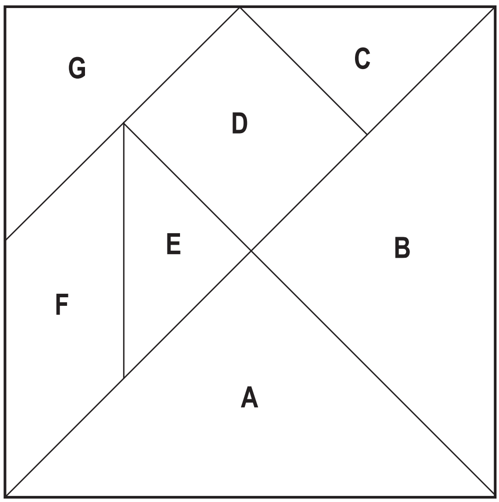
Nombre:

Curso: **Fecha:**

Hoja de actividad 4: Área y perímetro

Las fichas de tangrama

- Hay siete fichas de tangrama.
- Utiliza letras para etiquetar las fichas.



1. Enumera las fichas en un orden ascendente por área. ¿Cómo se puede decir que se trata del orden correcto?

   Enumera las fichas en orden ascendente de acuerdo con el perímetro. ¿Cómo se puede decir que se trata del orden correcto?

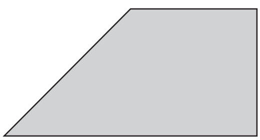
   Compara ambas listas.

   ¿Qué se puede concluir?

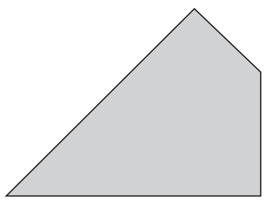
2. Supongamos que el cuadrado pequeño tiene un área de 1 unidad cuadrada. ¿Cuál es el área de cada una de las otras partes del conjunto?

Partes	**Área en unidades cuadradas**

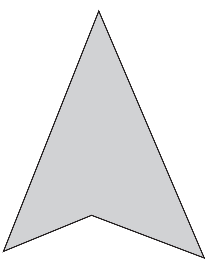
¿Cuál es el área de cada una de las siguientes formas hechas con las fichas de tangrama de la página 222?



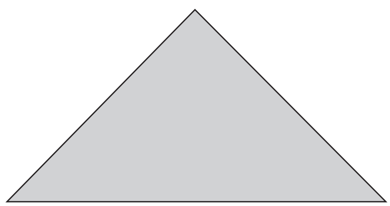
Área = ...



Área = ...



Área = ...



Área = ...

3. Considera el largo del lado del pedazo de papel como 1 unidad.
Estima el perímetro del cuadrado hecho con las siete fichas del tangrama.

Nombre:

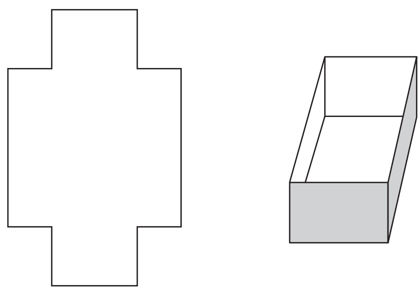
Curso: **Fecha:**

Hoja de actividad 5: Volumen

La caja con el mayor volumen

Se puede hacer una caja abierta con un rectángulo de papel cortado de una hoja A4, como se indica a continuación:

1. Corta cuadrados similares en cada una de las esquinas del papel.



2. Dobla los lados para formar una caja.
3. Encuentra el volumen de la caja cuando cortes los siguientes cuadrados en las esquinas del papel:
   a) Cuadrados de 1 cm
   b) Cuadrados de 3 cm
   c) Cuadrados de 4 cm

Dimensiones de los cuadrados removidos	Dimensiones de la caja abierta			Volumen (cm^3)
	Alto	Largo	Ancho	
1 cm				
3 cm				
4 cm				

4. ¿Cuál es el cuadrado más grande que se puede remover? ¿Por qué?

....

....

....

....

5. Experimenta con los cuadrados de distintos tamaños y utiliza la planilla para organizar la información y encontrar las dimensiones de la caja con el mayor volumen. (Entrega tu respuesta aproximada al cm más cercano a la centésima).

Largo = ...

Ancho = ...

Alto = ...

Mayor volumen = ...

Nombre:

Curso: **Fecha:**

Hoja de actividad 6: Tiempo

Plazo de entrega

El Sr. Soto y el Sr. Gómez conducen camiones.
Recogen gravilla en una cantera y la llevan al sitio de construcción.
El Sr. López, el gerente del sitio de construcción, lleva un registro de los tiempos de entrega.

Entregas del Sr. Soto	Entregas del Sr. Gómez
7:00 am.	7:45 am.
7:38 am.	8:20 am.
8:18 am.	8:58 am.
8:55 am.	9:38 am.
9:20 am.	10:15 am.
9:55 am.	10:48 am.
10:09 am.	11:13 am.
10:42 am.	11:48 am.
11:17 am.	
11:50 am.	

1. Compara los tiempos. ¿Se pueden encontrar patrones? Explique.

2. ¿Qué horarios tienen que cumplir los conductores? Explica.

3. Si continúa este horario, ¿cuántas cargas tiene que haber entregado hasta las 2:00 pm?

Capítulo 12

La enseñanza de geometría

Dindyal Jaguthsing

Que ningún ignorante de la Geometría entre aquí (en la puerta de la academia de Platón).

Geometría

La palabra 'geometría' deriva de la palabra 'geos', que significa 'tierra', y de la palabra 'metron', que significa 'medición'. Por lo tanto, de manera literal, geometría significa 'medición de la tierra'. La geometría es una de las ramas más antiguas e importantes de la matemática y se encuentra presente en los currículos escolares de todo el mundo en varios grados de complejidad. Freudenthal (1973) comentaba que hay dos aspectos principales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría:

1) Considerar a la geometría como una ciencia del espacio.
2) Considerarla como una estructura lógica, en donde la geometría es el entorno en el cual el estudiante puede entender la estructura matemática.

Como ciencia del espacio, el enfoque recae en el estudio de diversas figuras y sus propiedades que sirven para estudiar el espacio. Entre estas figuras se incluyen figuras planas (objetos en 2 dimensiones) y sólidas (objetos en 3 dimensiones). Como estructura lógica, la geometría tiene una naturaleza deductiva. Se basa en algunos conceptos primitivos como puntos, líneas y planos, y algunos axiomas y postulados, la leyes de la lógica y un cuerpo de teoremas.

Actividad 1

Para estudiantes/profesores

- Explique la idea de dimensión (D).
  - De ejemplos de objetos en dos y tres dimensiones. ¿Existen los objetos de 1 dimensión y los de 0 dimensión? ¿Podemos tener dimensiones fraccionarias?

Trasfondo histórico

La geometría tiene una larga historia. A pesar de que la geometría fue utilizada de manera informal en la mayoría de las civilizaciones, fueron los griegos los que la organizaron de manera sistemática como un tema de estudio. Se reconoce al matemático griego Tales (640-546 a.C.) como el padre de la organización deductiva de la geometría. Alrededor de 300 a. C., el matemático griego Euclides organizó los conocimientos geométricos que se tenían en esa época en 13 tomos de su libro titulado '*Elementos*'. La geometría deductiva desarrollada por Euclides ahora se conoce como la geometría euclidiana. Por casi 2000 años, la geometría se limitó a la geometría euclidiana, pero al desafiar algunos de sus postulados, distintos matemáticos han presentado diversas formas de la geometría, las que se han denominado 'geometrías no euclidianas'. El siglo XVII marcó el inicio de la geometría analítica con los trabajos de Descartes y Fermat, quienes crearon un sistema de coordenadas que combina álgebra y geometría. Las reformas curriculares de la década de 1960 dieron paso a cambios importantes en el currículo de matemática y en particular en el ámbito de la geometría. Comenzaron a volverse notorios nuevos enfoques para el estudio de la geometría, tales como los enfoques de vector, de coordenadas y de transformación. De esta manera, los currículos escolares modernos en todo el mundo incluyen tanto a la geometría euclidiana como a los diferentes enfoques algebraicos para el estudio de la geometría.

Razones que justifican el estudio de la geometría

La geometría es una rama muy valiosa de la matemática porque permite inculcar el razonamiento espacial: "el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales para los objetos en el espacio, las relaciones entre ellos y las transformaciones" (Clements y Battista,1992, pág. 420). El estudio de la geometría se centra principalmente en la adquisición del razonamiento geométrico. En el documento de estándares, publicado por el Consejo Nacional de Profesores de matemática (NTCM) en 2000, se mencionaba que la visualización espacial es un aspecto importante del razonamiento geométrico. Por visualización espacial se entiende construir y manipular las representaciones mentales de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde distintas perspectivas. Asimismo, en los documentos del NTCM se menciona que los programas de enseñanza, desde la educación preescolar hasta el final de la educación media, deberían capacitar a los estudiantes para:

- analizar las características y propiedades de formas geométricas de dos y tres dimensiones y formular argumentos matemáticos sobre las relaciones geométricas.
- especificar ubicaciones y describir las relaciones espaciales con el uso de la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.
- aplicar transformaciones y utilizar simetría para analizar situaciones matemática.
- utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelamiento geométrico para resolver problemas.

Por otro lado, Usiskin (1987) afirma que la geometría sirve para cuatro aspectos: visualizar, dibujar y construir figuras; estudiar los aspectos espaciales del mundo físico; para representar conceptos matemáticos no visuales; y para establecer relaciones y representaciones como un sistema matemático formal.

A nivel de educación básica, no nos centramos en la geometría como un sistema matemático formal. No obstante, los otros tres aspectos postulados por Usiskin son claramente importante a este nivel de educación.

Acerca del aprendizaje de la geometría

Piaget e Inhelder (1967) propusieron una perspectiva teórica para el aprendizaje de la geometría. En su propuesta afirmaban que un niño no representa el espacio al percibir directamente el entorno. Más bien, lo construye mediante la manipulación previa de ese entorno, y la organización progresiva de las ideas geométricas se atiene a un orden definido, el que se denomina Tesis de la primacía topológica (TPT). La TPT afirma que, primero se construyen las relaciones topológicas (interior, exterior, conexión y continuidad), luego se construyen la relaciones de proyección (rectilinealidad) y, por último, se construyen las relaciones euclidianas (angulosidad, paralelismo y distancia). (Consulte Clements y Battista,1992).

En la década de 1950, en Holanda los van Hieles (esposo y esposa) propusieron otra perspectiva teórica para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Propusieron cinco niveles de categorías jerárquicas que describen el desarrollo del razonamiento geométrico del estudiante. Estos niveles no dependen de la edad del alumno, como es el caso de la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget. Los van Hieles, en un principio, utilizaron el nivel 0 como el nivel más bajo y el nivel 4 como el más alto de los 5 niveles (Crowley,1987). Sin embargo, algunos autores utilizan una numeración del 1 al 5 (Pegg y Davey, 1998). En este libro se utilizará esta última numeración.

- *Nivel 1: reconocimiento*

  En este nivel, los estudiantes reconocen una figura geométrica por su apariencia o forma. Las propiedades de las figuras no cumplen una función explícita en su identificación. Los estudiantes no cuentan con la capacidad perceptiva necesaria para reconstruir las figuras de memoria.

- *Nivel 2: análisis*

  En este nivel, los estudiantes identifican una figura según sus propiedades, las que se consideran como independientes entre sí. Los estudiantes no son capaces de definir las figuras.

- *Nivel 3: deducción informal*

  En este nivel, los estudiantes ya no consideran que las propiedades de las figuras son independientes, pueden establecer relaciones entre las propiedades de cada figura y entre diferentes figuras, pueden deducir algunas conclusiones lógicas y seguir demostraciones informales además de definir figuras con unas pocas propiedades.

- *Nivel 4: deducción formal*

  En este nivel, los estudiantes entienden la importancia de la deducción. En este nivel, una persona puede presentar demostraciones. Ya conocen y entienden condiciones necesarias y suficientes. Los estudiantes no son capaces de trabajar en un sistema axiomático formal.

- *Nivel 5: rigor*

  En este nivel, los estudiantes pueden hacer comparaciones de varios sistemas deductivos y explorar diferentes geometrías basadas en varios sistemas de postulados. Por ejemplo, los estudiantes pueden estudiar la geometría no euclidiana en este nivel.

A nivel de enseñanza básica, la mayor parte del estudio se centra en los primeros dos niveles y un poco en el tercero. Los niveles 4 y 5 son niveles avanzados en esta teoría y, por lo general, los alumnos no los verán cuando están en la enseñanza básica.

Por otro lado, Hoffer (1981) afirmaba que cuando se estudia la geometría, el objetivo es que los estudiantes adquieran cinco habilidades importantes: las habilidades visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas.

- *Habilidades visuales*

  Reconocimiento, observación de propiedades, interpretación de mapas e imágenes, reconocimiento de diferentes ángulos, etc.
- *Habilidades verbales*

  Uso correcto de la terminología y comunicación precisa cuando se describen conceptos espaciales y relaciones.
- *Habilidades de dibujo*

  Comunicarse por medio de dibujos, capacidad de representar formas geométricas en 2 y 3 dimensiones, hacer diagramas a escala, trazar figuras isométricas, etc.
- *Habilidades lógicas*

  Clasificación, reconocimiento de propiedades esenciales como criterio, identificar patrones, formular y comprobar hipótesis, hacer inferencias, usar contra ejemplos.
- *Habilidades aplicadas*

  Aplicaciones en la vida real de los resultados geométricos aprendidos. Usos reales de la geometría (por ejemplo para diseñar empaques, etc).

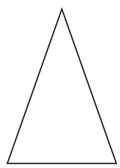
Representación de ideas geométricas

En la geometría hay una abundancia de objetos matemáticos. Los conceptos geométricos, como la mayoría de los conceptos matemáticos, son abstractos. Es importante recordar que las figuras que usualmente dibujamos en geometría son meras representaciones de objetos geométricos; las figuras no son los objetos mismos. Por lo tanto, podemos acceder a los objetos geométricos por medio de sus representaciones semióticas (Duval, 1999). Básicamente, en geometría utilizamos el lenguaje, símbolos o figuras para describir objetos geométricos. Duval se refiere a estos últimos como los 'tres registros': el registro del lenguaje natural, el registro del lenguaje simbólico y el registro figurativo.

El uso de figuras en geometría tiene varias ventajas. Las figuras permiten la interacción simultánea de relaciones múltiples para que podamos entender un concepto de manera integral. No obstante, las figuras también pueden desviar el razonamiento. Algunos resultados geométricos pueden parecer evidentes para los estudiantes, lo que a fin de cuentas no deja que se perfeccione el razonamiento geométrico. Los alumnos no establecen relaciones entre las diferentes representaciones de los conceptos geométricos. Por lo general, se adhieren a representaciones prototípicas, lo que Vinner y Hershkowitz (1980) denominan imágenes conceptuales. Es posible que los alumnos tengan diferentes imágenes conceptuales para la misma definición de concepto. Por lo tanto, el uso de definiciones puede no ser la opción pedagógica adecuada para presentar conceptos a los alumnos. Una mejor alternativa podría ser utilizar ejemplos concretos y varios ejemplos positivos y negativos de los conceptos.

En la actualidad, la tecnología moderna provee varias alternativas para inculcar una visión dinámica de la geometría, en vez de la visión estática tradicional que se les ha presentado a muchos estudiantes.

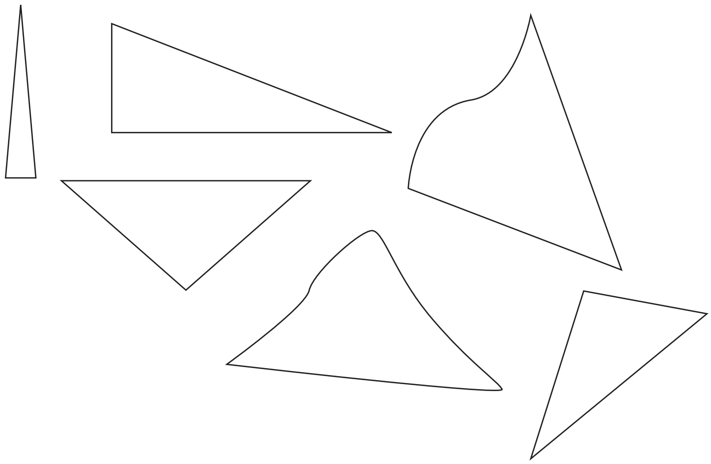
Hay otro tema importante respecto al uso de figuras en la geometría. Como Mesquita (1998) explica, siempre representamos un objeto concreto, incluso si solo nos interesa uno abstracto.



Por ejemplo, el triángulo que se muestra arriba puede representar un objeto geométrico abstracto o un ejemplo en particular concreto. Por lo tanto, cuando las figuras se utilizan por sí solas no permiten que uno distinga entre los dos casos, lo que es un gran problema para los alumnos que recién comienzan a estudiar geometría. A estos estudiantes les cuesta distinguir entre los particular y lo abstracto.

Enseñar ideas

1. Una de las conexiones importantes que los estudiantes deben establecer cuando estudian geometría es entre el nombre del concepto (registro lingüístico) y la representación correspondiente del concepto (registro figurativo). Se les debería presentar a los alumnos varias orientaciones de la figura. Si solo se utilizan formas prototípicas, por ejemplo, el uso de solo triángulos de ángulos agudos con una base horizontal puede no ser una representación lo suficientemente variada del concepto de triángulo. También se sugiere utilizar, a modo juicioso, ejemplos contrarios para el concepto de triángulo, tal como se ilustra a continuación.



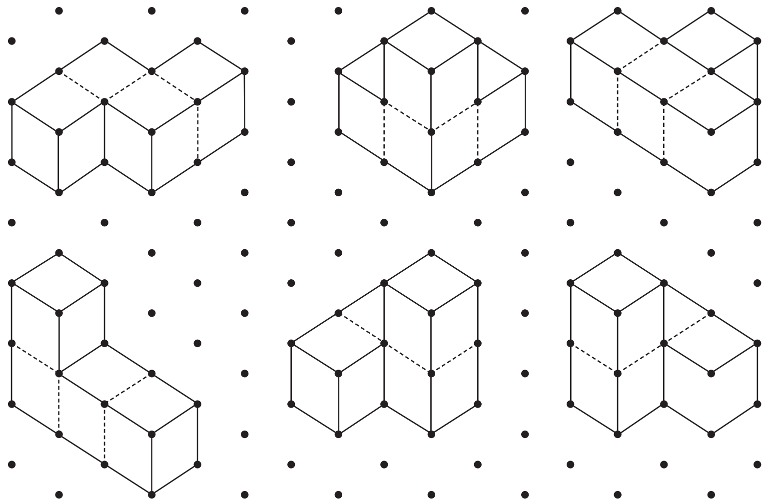
Puede ser útil pedir a los alumnos que expliquen por qué algunas de las figuras son ejemplos negativos de un triángulo.

2. Los conceptos de menor nivel (también denominados conceptos primarios), como el caso de un triángulo, no se pueden explicar por medio de una definición a los estudiantes de menor edad. Se debe entregar un número adecuado de objetos concretos y representaciones concretas según lo sugiere Skemp (1987). Los conceptos primarios conforman los cimientos para la formación de conceptos de mayor nivel o conceptos secundarios, tales como congruencia o similitud. Deberíamos tener cuidado cuando utilizamos formas triangulares para presentar la idea de triángulo, pues puede dar a entender que se puede manipular o mantener un triángulo. A la hora de concretizar se debe tener cuidado de marcar la diferencia entre el objeto matemático abstracto y la representación concreta del objeto.
3. Se debe alentar a los alumnos a que dibujen figuras. Por ejemplo, pida a sus alumnos que hagan un plan del edificio de la escuela. Los primeros dibujos no siempre serán buenas representaciones. Sin embargo, con práctica, podrán perfeccionar sus destrezas motoras y pronto entenderán la importancia de utilizar reglas y otros instrumentos para trazar diagramas mejores.
4. Explique cómo utilizar la regla y cuadrícula para trazar líneas paralelas y perpendiculares, además de explicar cómo utilizar un transportador para medir ángulos. No espere que los alumnos ya dominen estas habilidades. Recalque la precisión en las lecturas y la

importancia de utilizar un lápiz con una punta bien perfilada y una regla delgada para hacer los dibujos.

5. Utilice diferentes materiales didácticos auxiliares de enseñanza, por ejemplo, recortes de papel, modelos en madera o plásticos, tangramas y geoplanos. Utilice programas computacionales dinámicos de geometría cuando sea apropiado. Por ejemplo, para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, uno puede dibujar un triángulo, medir sus ángulos y la suma de los totales, y arrastrar los vértices del triángulo para demostrar que la suma de los ángulos permanece constante para cualquier forma triangular.
6. Aliente a los alumnos a identificar las propiedades de las figuras y deles el tiempo para que agrupen las figuras de acuerdo con las propiedades que tengan en común. No se apresure ni fuerce la idea de organizar las figuras en categorías. Es posible que los alumnos no acepten que un cuadrado es un tipo especial de rectángulo. Sin embargo, se puede guiar a los niños a que busquen definiciones mínimas de las figuras planas. En este caso, puede ser útil trabajar con los programas computacionales dinámicos de geometría. Recalque las relaciones que existen entre las figuras sin entrar en detalles.
7. Presente el tema sobre teselaciones por medio de figuras simples que los alumnos ya hayan visto antes. Por ejemplo, los rectángulos y cuadrados son bastante comunes. Pida a los alumnos que dibujen diferentes patrones de teselación con un cuadrado y un rectángulo como unidades. Solo una vez que los alumnos dominen los patrones de teselación simples, el profesor puede pasar a ilustrar otros más complejos. Este tema se puede explorar aún más con programas computacionales dinámicos de geometría.
8. Presente un ángulo como una porción de un giro. La idea de un giro completo debería estar siempre presente. Los alumnos deben entender que los ángulos en 90° y los ángulos en 180° son partes específicas de un giro completo.
9. Aproveche al máximo el papel cuadriculado y con puntos para trazar diagramas como corresponde. Las líneas simétricas, paralelas y perpendiculares se identifican con más facilidad cuando se dibujan en papel cuadriculado. Utilice papel con puntos para hacer varias representaciones de pilas de unidades en cubo cuando deba trabajar con figuras en 3 dimensiones, como se muestra a continuación. Aquí se pueden realizar dos tipos de actividades: utilizar representacio-

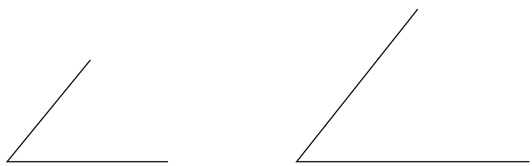
nes en dos dimensiones para hacer modelos en tres dimensiones con unidades de cubos, y utilizar modelos en tres dimensiones con unidades de cubos para dibujar representaciones en dos dimensiones, como se muestra a continuación.



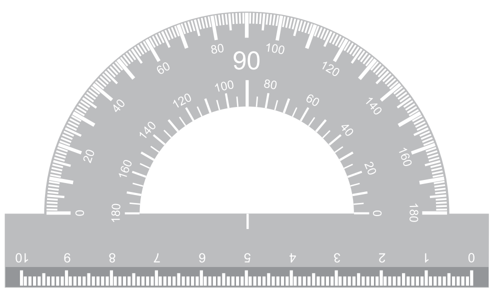
10. Utilice justificaciones cuando sea posible. Un enfoque relacional para abordar la geometría hará más sentido a los estudiantes de todas las capacidades. Por ejemplo, para demostrar que la suma de los ángulos en un triángulo dan un total de 180°, se puede utilizar uno de los siguientes enfoques:
    a) Recorte tres formas triangulares idénticas con láminas de goma eva y coloque los triángulos a modo de que los tres ángulos diferentes estén uno al lado del otro y se junten en un punto. Los ángulos deberían formar un ángulo llano para mostrar que los tres ángulos suman 180°.
    b) Dibuje un triángulo en la pizarra y utilice una regla larga para describir cada uno de los tres ángulos del triángulo. Al hacer esto, aproveche de mostrar que la regla termina en la dirección opuesta al ángulo que mide, lo que indica que la regla atraviesa por la mitad de un giro, es decir, muestra un ángulo de 180°.
11. Establezca vínculos con otras áreas de la matemática, por ejemplo, la recta numérica con números, fracciones o decimales, o una secuencia de figuras en relación con patrones numéricos geométricos.

Dificultades de aprendizaje

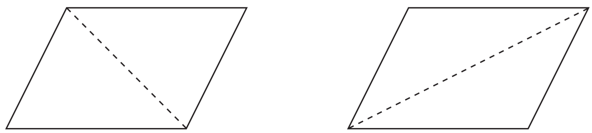
1. A los alumnos les resulta difícil relacionar las diferentes representaciones de los objetos geométricos. Puede ser que no identifiquen una forma con el nombre que corresponde, o que confundan los triángulos equiláteros y los triángulos isósceles. Es posible, incluso, que no sepan cómo se escriben algunos de los nombres de los conceptos (como 'isósceles').
2. Los alumnos tienden a enfocarse en las formas prototípicas de los objetos. Por ejemplo, puede ser que utilicen términos como 'triángulo parado', 'triángulo invertido', o 'triángulo delgado'. Las figuras que se dibujan deben estar en diferentes orientaciones.
3. Es posible que los alumnos no distingan bien las propiedades de los diferentes tipos de figuras, por ejemplo, entre las propiedades de un paralelogramo y un trapecio o entre las propiedades de un cuadrado y un rombo.
4. Algunos alumnos creen que los ángulos que están entre dos líneas de diferente largo son necesariamente diferentes. Por ejemplo, algunos alumnos pueden pensar que el segundo ángulo que se muestra en el diagrama a continuación es mayor que el primero, a pesar de que ambos miden lo mismo.



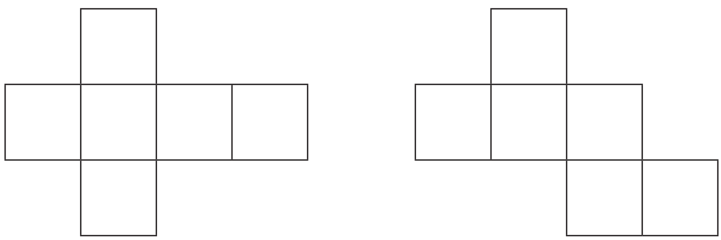
5. A algunos alumnos les puede costar leer la medida de un ángulo con el transportador, porque se confunden y no saben cuál de las dos escalas utilizar.



6. A veces, los alumnos no son capaces de imaginar superficies, bordes y esquinas de sólidos que no han visto.
7. A los alumnos les puede costar nombrar una figura de forma correcta. Quizás no conocen las convenciones en donde se estipula que se utilizan mayúsculas para etiquetar los vértices.
8. Los alumnos pueden pensar que congruencia es lo mismo que simetría. Por ejemplo, pueden pensar que una diagonal de un paralelogramo es una línea simétrica pues las dos partes a cada lado de la diagonal son congruentes.



9. Los alumnos tienen problemas cuando deben distinguir entre secuencias de sólidos convencionales y no convencionales (por ejemplo, considere las secuencia de los cubos que se muestra a continuación).



Convencional No convencional

Actividad en un geoplano 1

Para estudiantes de pedagogía en práctica y sus alumnos:

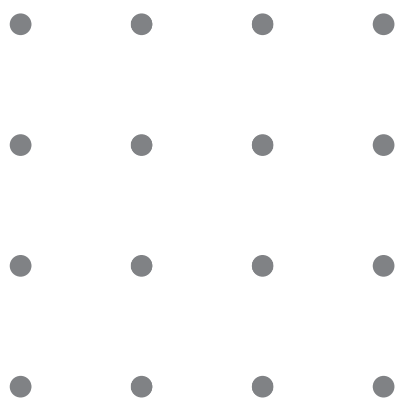
1. En un geoplano, construya algunas figuras con la ayuda de elásticos.
2. Cuente el número de puntos externos y el número de puntos internos para cada figura.
3. Encuentre el área de cada figura utilizando una unidad cuadrada en el geoplano como una unidad estándar.
4. Registre los datos en una tabla (como la que se incluye más abajo)
5. Encuentre la relación entre el área de la figura y el número de puntos internos y externos (Teorema de Pick).

Número de la figura	Número de puntos externos	Número de puntos inernos	Área de la figura

Actividad en un geoplano 2

Para estudiantes de pedagogía en práctica y sus alumnos.

En un geoplano de 3 x 3 (es decir, uno con 16 vértices), encuentre todos los cuadriláteros de diferentes tamaños que se pueden dibujar. Encuentre el área de cada uno de los cuadriláteros.



Actividad con el programa computacional 1

Para estudiantes de pedagogía en práctica.

Escoja un tema en el que pueda integrar el uso del programa computacional 'Geometers Sketchpad' (GSP) para enseñar matemática a nivel de enseñanza básica. Describa en detalle cómo piensa integrar el GSP en la enseñanza del tema que ha escogido. Puede considerar los siguientes puntos:

1. Una razón que justifique la selección de la actividad con GSP para enseñar el tema particular que ha escogido.
2. Una descripción de la actividad misma.
3. ¿Cómo la actividad puede ayudar a comunicar el concepto que quiere enseñar?
4. ¿Cuáles son las fortalezas y debilidades percibidas de la actividad con GSP para enseñar ese tema en particular?

Actividad con el programa computacional 2

Para estudiantes de pedagogía en práctica

Explique cómo piensa utilizar el GSP para mostrar que:

1. La suma de los ángulos en un triángulo es 180°.
2. Un cuadrado es un rectángulo.
3. Un rectángulo es un tipo especial de paralelogramo.
4. La línea de simetría divide una figura en dos partes congruentes.
5. Los triángulos siempre se pueden teselar.
6. Los ángulos verticales opuestos son iguales.
7. La suma de dos ángulos internos cualesquiera de un triángulo es igual al ángulo exterior opuesto del triángulo.
8. El área de un triángulo es la mitad del área del rectángulo que se puede formar con el mismo.
9. El valor de π es aproximadamente 3,14.

Actividad con el programa computacional 3

Para estudiantes de pedagogía en práctica.

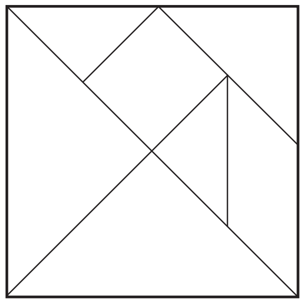
Explique cómo piensa utilizar el GSP para:

1. Construir un cuadrado, un rectángulo y un paralelogramo de ciertas dimensiones.
2. Dibujar una recta numérica.
3. Construir un semicírculo.
4. Una planilla cuadriculada.
5. Una planilla con puntos.

Actividad con tangrama

Para estudiantes de pedagogía en práctica y sus alumnos.

a) las siete piezas del tangrama forman un cuadrado, como se muestra en la imagen a continuación. Forme un cuadrado utilizando solo 2 piezas, 3 piezas y 4 piezas. ¿Puede formar un cuadrado utilizando solo 5 piezas o solo 6 piezas?



b) Construya las siguientes formas utilizando solo dos piezas del tangrama:
   1. Triángulo
   2. Cuadrado
   3. Paralelogramo
   4. Trapecio

c) Construya las siguientes formas utilizando solo tres piezas del tangrama:
   1. Triángulo
   2. Cuadrado
   3. Rectángulo
   4. Paralelogramo

d) Construya las siguientes formas utilizando solo cuatro piezas del tangrama:
   1. Triángulo
   2. Cuadrado
   3. Rectángulo

e) Construya las siguientes formas utilizando las siete piezas del tangrama:
   1. Triángulo
   2. Cuadrado
   3. Paralelogramo

Actividad con objetos en 3 dimensiones

Para estudiantes de pedagogía en práctica

1. Describa un cubo. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? Describa un ortoedro. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? Compare un cubo y un ortoedro.

   Complete la tabla a continuación. ¿Qué conclusiones puede obtener de los valores de C, V y A de la tabla?

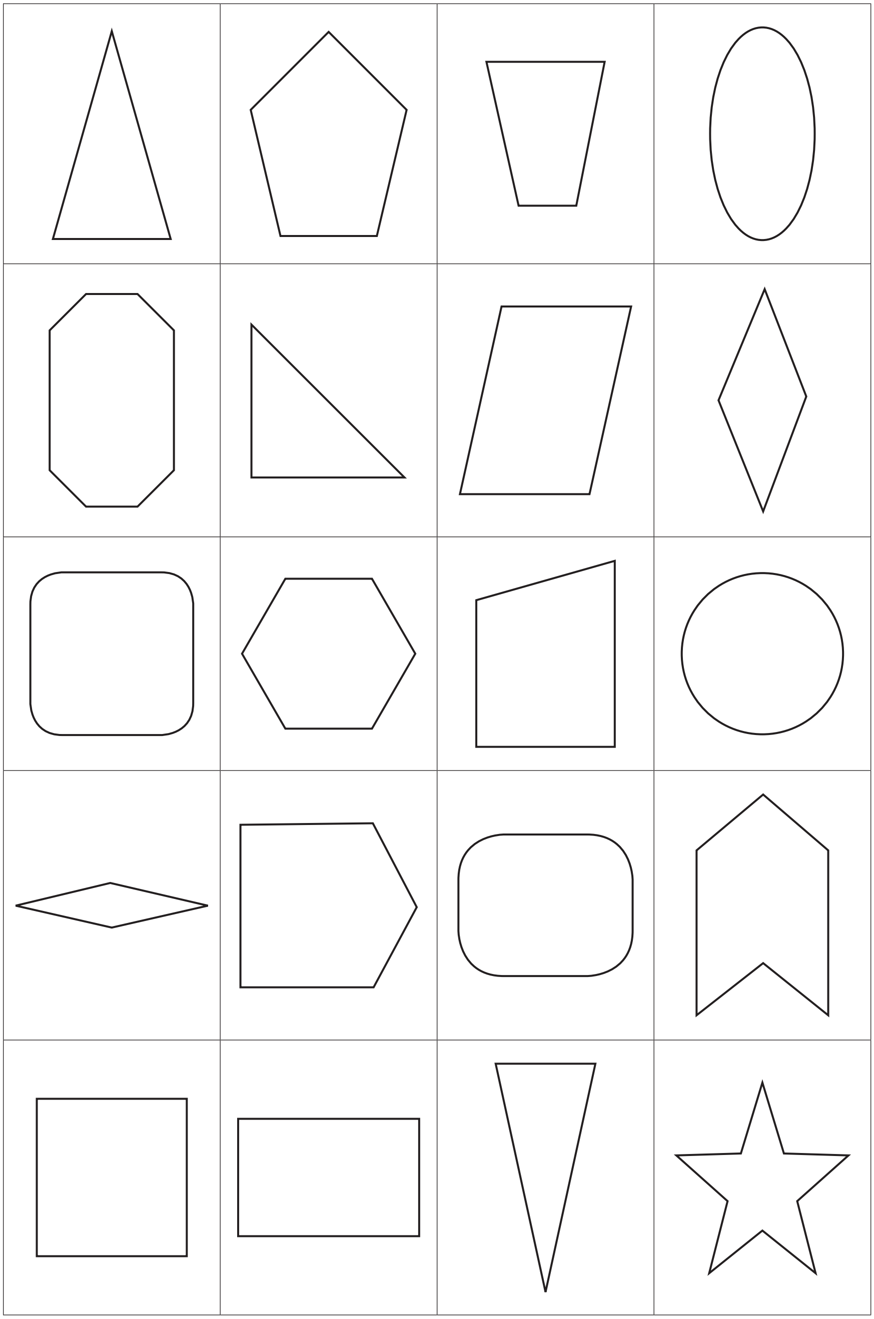
Sólido	Número de caras (C)	Número de vértices (V)	Numero de aristas (A)
Cubo			
Ortoedro			
Pirámide con base triangular			
Pirámide con base cuadrada			

2. Encuentre todas las formas para apilar 5 cubos de unidad idénticos. Los cubos tienen que apilarse de manera tal que cada cubo toque toda la cara de otro cubo y que ninguno de los cubos se caigan. Dibuje las diferentes disposiciones en un papel con puntos.
3. Dibuje una secuencia de un cubo, un ortoedro y un prisma con una sección transversal triangular.

Actividad de la teoría de van Hiele

Para estudiantes de pedagogía en práctica

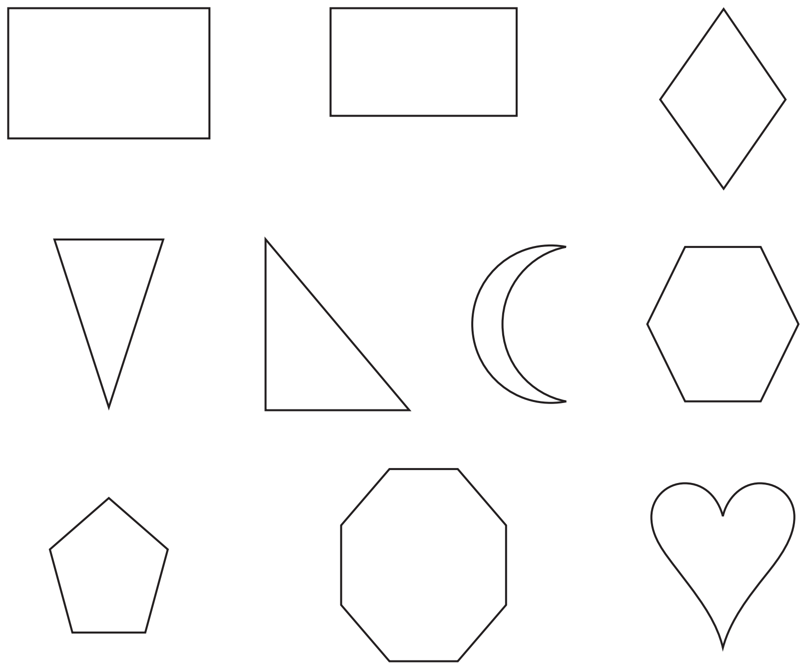
1. Imprima dos copias de las 20 figuras que se entregan más abajo.
2. Corte cada una de las figuras para obtener 20 tarjetas individuales.
3. Entregue una serie de 20 tarjetas a un alumno. Pídale que agrupe las figuras como él lo prefiera.
4. Pregunte la razón por la cual el alumno agrupó las figuras de esa manera.
5. Entregue al mismo alumno la segunda serie de 20 tarjetas. Pídale que agrupe las figuras de manera diferente.
6. Mida el nivel de razonamiento geométrico que aplica el alumno de acuerdo con la teoría de van Hiele. Comente por qué asignó ese nivel al alumno.



Actividad de simetría

Para estudiantes de pedagogía en práctica y sus alumnos

a) Dibuje los ejes de simetría de cada una de las siguientes figuras.



b) En cada caso, dibuje una figura plana que tenga las siguientes propiedades:

1. Tiene un número reducido de lados y exactamente tres ejes de simetría.
2. Tiene exactamente cuatro ejes de simetría.
3. Es un cuadrilátero en el cual los ángulos opuestos son los mismos, pero no tiene ejes de simetría.
4. Es un cuadrilátero sin ángulos rectos y con exactamente un eje de simetría. También tiene dos pares de lados de igual largo.

c) Soy un cuadrilátero y tengo un par de lados paralelos. Por lo general no tengo ejes de simetría. ¿Qué soy?

Actividades adicionales

Para estudiantes de pedagogía en práctica

1. Corte cada una de las siguientes formas en goma eva: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio. Examine con cuidado la forma cuadrada y anote algunas de las propiedades importantes de un cuadrado. ¿Qué propiedad o conjunto de propiedades cruciales definen a un cuadrado (definición mínima)?
   - ¿Es un cuadrado un rectángulo? ¿Por qué sí o por qué no?
   - Compare las propiedades de un cuadrado y un paralelogramo ¿Es un cuadrado un paralelogramo?
   - Compare la forma cuadrada con las otras formas recortadas.
   - De acuerdo a su análisis, muestre en un diagrama las relaciones entre los siguientes cuadriláteros: cuadrado, rombo, rectángulo, paralelogramo y trapecio.
   - Si un volantín se define como un cuadrilátero con dos pares de lados congruentes adyacentes, explique cómo este caso se presenta en el diagrama.
2. Para esta actividad, recorte cuatro círculos de diferente radio en una lámina de goma eva. Etiquete los círculos del 1 al 5. Con la ayuda de un cordel liviano y extensible, mida la circunferencia y el diámetro de cada una de las cinco formas circulares y complete la siguiente tabla.

Círculo	**Largo de la circunferencia (C)**	**Lardo del diámetro (D)**	$\frac{3}{5}$
1			
2			
3			
4			
5			

¿Qué se puede concluir de la tabla?

[Por lo general, esta actividad se utiliza para presentar un concepto principal a nivel de enseñanza básica]

Responda las siguientes preguntas.

a) Nombre este concepto.

b) ¿Por qué es tan importante este concepto?

c) ¿Qué problemas o falencias puede anticipar cuando los alumnos completen la actividad? ¿Cómo puede resolver estas falencias?

3. Más abajo se muestra una copia de una guía de ejercicios de un estudiante. Examine con cuidado los errores que comete el estudiante desde la parte (a) a la (d). Comente sobre estos errores. ¿Por qué cree que el estudiante cometió tales errores? ¿Existe un patrón de error? ¿Cómo puede ayudar a este estudiante?

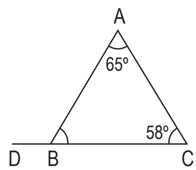
Las siguientes figuras no están a escala.

a) DBC es una línea recta. Encuentra el ángulo ABD.

$58° + 65° = 123°$

$180° - 123° = 57°$

$\sphericalangle ABD = 57°$

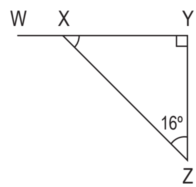


b) WXY es una línea recta. Encuentra el ángulo WXZ.

$90° + 46° = 136°$

$180° - 136° = 44°$

$\sphericalangle WXZ = 44°$

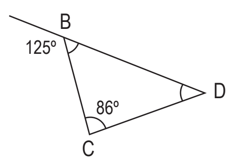


c) ABD es una línea recta. Encuentra el ángulo BDC.

$125° + 86° = 211°$

$360° - 211° = 149°$

$\sphericalangle BDC = 149°$

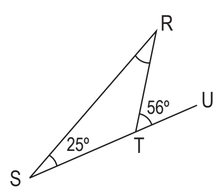


d) STU es una línea recta. Encuentra el ángulo SRT.

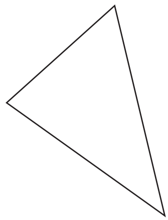
$25° + 56° = 81°$

$180° - 81° = 99°$

$\sphericalangle SRT = 99°$



4. Dibuje un acutángulo en un papel (no es necesario que sea equilátero).



 - Explique con claridad cómo piensa dibujar un rectángulo que tiene exactamente la misma área que el triángulo que acaba de dibujar. Dibuje un rectángulo.
 - Recorte la forma triangular en una hoja de papel y verifique que el triángulo y el rectángulo tengan la misma área utilizando partes de la forma triangular para cubrir exactamente el rectángulo. ¿Existe solo una manera de obtener un rectángulo con exactamente la misma área que el triángulo?
 - Repita los pasos anteriores con un triángulo de obtusángulo.

5. Un estudiante tiene una cuerda de 36 cm de largo. Utiliza toda la cuerda para hacer rectángulos de diferentes dimensiones. Concluye que la forma rectangular con el área más grande que puede hacer con la cuerda es, de hecho, un cuadrado con un lado de 9 cm.

   Explique cómo el estudiante puede haber llegado a su conclusión.

   ¿Cree que su conclusión es correcta?

   Si un alumno realiza sus investigaciones con una cuerda de 24 cm, explique cuál podría ser su conclusión.

   El estudiante puede confundirse y pensar que un cuadrado es un rectángulo. ¿Cómo puede convencer a este estudiante que un cuadrado es o no un rectángulo, a pesar de que esta información puede no ser tan importante a nivel de enseñanza básica?

   El estudiante ahora quiere investigar cómo el perímetro de una forma rectangular cambia a rectángulos que tengan la misma área. Explique cómo podría proceder el estudiante. ¿Cuál podría ser la conclusión esperada?

Referencias

Clements D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for research in teaching and learning of mathematics* (págs. 420-464). Nueva York: Macmillan.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of development of geometric thought. En M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry*, K-12 (1987 Yearbook) (págs. 1-16). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de matemática.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En E Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 3-26). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.

Consejo Nacional de Profesores de matemática (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de matemática (NCTM).

Pegg J. & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding of geometry: A synthesis of two models. En R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (págs. 109-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget J. & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. Nueva York: W. W. Norton & Co.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum Associates.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. En M. M. Lindquist y A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry*, K-12 (1987 Yearbook) (págs. 17-31). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de matemática.

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 177-184). Berkeley: Universidad de California.

Fuentes de lectura complementaria

Gristein, L. y Lipsey, S. I. (2001). *Encyclopedia of mathematics education*. Nueva York y Londres: RoutledgeFalmer.

Capítulo 13

La enseñanza de álgebra

Quek Khiok Seng

Introducción

Profesor: $3a$ significa $a + a + a$.
Alumno: Profesor, ¿'$3a$' no significa 'treinta y a'?
Profesor: ¿Por qué?
Alumno: Porque 36 es treinta y seis.
Profesor: ...

Las respuestas de los alumnos, por lo general de buena fe, usualmente toman por sorpresa a los profesores. Piense en la pregunta y la respuesta del niño en el intercambio anterior entre profesor y alumno. ¿Por qué cree que al alumno pensó de esta manera? ¿Es 'lógico'?

La transición de la aritmética al álgebra puede ser una experiencia desafiante para los niños. Aparecen nuevas reglas y convenciones que hay que seguir al momento de trabajar con números y letras (como las reglas para el orden de las operaciones aritméticas). El significado de las letras utilizadas como abreviaturas en aritmética y aquellas utilizadas en álgebra es distinto en algunos puntos. Los niños tienen que pensar distinto de cómo piensan en la aritmética, en el sentido de que la serie de símbolos '5 + x' representa x más que 5 (o 5 más que x) al igual que la suma de los números 5 y x (5 sumado a un número). La expresión '5 + x' no le debería indicar a los alumnos que tienen que yuxtaponer '5' y 'x' para obtener 5x'.

Actividades

1. ¿Por qué un alumno escribiría '$5 + x = 5x$'? Piense en algunas posibles razones. Lleve a cabo un debate con el grupo.
2. ¡Intente lo siguiente! E es el número de estudiantes de un colegio. P es el número de profesores. Hay 20 veces más estudiantes que profesores. Escriba una ecuación utilizando E y P.

   ¿Es la respuesta 20E = P o es 20P = E? Explique sus razones.

El álgebra en Singapur

En Singapur, el álgebra se enseña a los niños de sexto año de enseñanza básica en el programa estándar, pero no a los del programa fundacional.

Expresión algebraica en una variable	
Los niños deberían ser capaces de	**Apuntes de enseñanza**
a) Utilizar una letra para representar un número desconocido y escribir una expresión algebraica sencilla en una variable para una situación dada.	a) Excluya las expresiones con una variable en el denominador, tales como x^{-1}.
b) Simplificar las expresiones algebraicas	b) Excluya: (i) expresiones con coeficientes fraccionarios ii) expresiones con paréntesis
c) Evaluar expresiones algebraicas sencillas mediante la sustitución	
d) Resolver problemas de enunciado con expresiones algebraicas	

*Fuente: *Mathematics Syllabus*—Primary 2001 (DPDC, 2000)

Acerca de este conjunto de apuntes de enseñanza

Las tareas de enseñanza en las siguientes secciones ofrecen a los estudiantes de pedagogía básica en matemática el conocimiento y la comprensión del contenido que se necesita para enseñar álgebra en los establecimientos de educación básica de Singapur. Usted se dará cuenta que el nivel de matemática que se requiere para completar estas tareas es más avanzado que el necesario para la matemática de la educación básica. Esta dificultad añadida es intencional pues, como profesores, deberíamos tratar de entender un tópico a un nivel más avanzado que al que lo enseñamos.

Algo de historia del álgebra

La palabra 'álgebra' proviene de la traducción de la palabra árabe 'al-jabr'. Uno de los primeros textos conocidos (cerca de 825 d. C.) que trata sobre álgebra es el *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala* del matemático Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. El título del libro se podría traducir de la siguiente forma: 'Cómo calcular con el método de completar y equilibrar'.

Al-jabr se refiere a la operación de transponer una cantidad que se sustrae en un lado de la ecuación al otro lado, donde se vuelve una cantidad que se suma. Al-muqabala se refiere a la reducción de un término positivo al restar cantidades similares en ambos lados de la ecuación. Otro de los primeros textos que tratan sobre álgebra se titula Al-jabr w'al Muqala, que fue escrito cerca del 1100 d. C. por Omar Khayyam. Las raíces del álgebra se pueden rastrear hasta estos primeros intentos por encontrar formas generales para resolver ecuaciones. Para ahondar en la historia del desarrollo del álgebra, visite www.algebra.com/algebra/about/history/.

Pensar

Recuerde los años en que usted mismo estaba aprendiendo álgebra. ¿Puede reconocer el al-jabr y al-muqabala en la solución moderna de una ecuación? Considere lo siguiente: encuentre el valor de x si $3x + 2 = 4 - 2x$. ¿Cuál de los dos, *al-jabr* o *al-muqabala*, se vincula con la idea innombrable de 'pasar al otro lado y cambiar el signo'?

¿Qué es el álgebra?

No se pretende en este libro entregar una respuesta definitiva a la pregunta qué es el álgebra (puede ser que de todas maneras no sea posible hacerlo). Por lo general, la parte principal de las experiencias relacionadas con álgebra para los alumnos que cursan la educación básica implica el uso de letras para representar números y el desarrollo de una mayor conciencia sobre el método matemático que se simboliza por medio del uso tanto de números como letras. El álgebra se conoce como el lenguaje de la matemática. Ha sido descrito como una rama de la matemática que trata sobre objetos y estructuras matemática abstractas (por ejemplo, grupos y anillos). En las escuelas, usualmente el álgebra se trata como aritmética generalizada (una extensión de la aritmética). Al estudiar álgebra como parte de la matemática escolares, se deben considerar cinco aspectos: las incógnitas, las fórmulas, los patrones generalizados, los marcadores de posición y las relaciones.

Las incógnitas

Considere las siguientes preguntas 'equivalentes':

1. ¿Qué número, cuando se le suma al 2, da como resultado 5?
2. Encuentre el número que falta en el cuadrado: $2 + \square = 5$
3. Complete el espacio en blanco: __ + 2 = 5
4. Resuelva $2 + x = 5$

En cada pregunta, hay una *incógnita* (número), que se representa por una palabra, un cuadrado, un espacio en blanco o una letra x. Se puede decir que los niños están 'haciendo' álgebra cada vez que se les pide que encuentren la incógnita en una situación, ya sea que la tarea se exprese 'verbalmente', como (1), o simbólicamente, como en (4). ¿Sabe cuándo los niños se encuentran por primera vez con estos tipos de preguntas?

Las fórmulas

Considere la fórmula del área de un rectángulo: Área de un rectángulo = largo x ancho, o en símbolos, $A = l \times a$. Cuando se les pide a los niños que busquen A cuando $l = 3$ cm y $b = 5$ cm, podemos decir que los alumnos están haciendo álgebra.

De hecho, se les ha pedido a alumnos en el 6° año de educación básica que encuentren el largo (o el ancho) cuando el ancho (o el largo) del área de un rectángulo se dan antes de que se les haya enseñado álgebra de manera formal. De igual manera, se puede decir que los alumnos piensan algebráicamente cuando se les pide que resuelvan problemas, tales como encontrar el área de un rectángulo a partir de su largo y su perímetro. ¿Cuándo aprenden los alumnos sobre la posibilidad de sustituir valores en una fórmula? ¿Cuarto, quinto o sexto año de educación básica?

Pensar

¿Están los niños haciendo álgebra si ellos encuentran (cuando el profesor se los pide) el valor de A, si $A = 3 \times 5$?

Patrones generalizados

Las matemática se conocen como la ciencia de los patrones. El álgebra, como lenguaje, sirve para expresar los patrones que se observan en la matemática. Por ejemplo, para multiplicar un número cualquier por 339, primero multiplica el número dado por 400 y luego resta el número del producto. El patrón o regla, expresado algebraicamente, es $399n = 400n - n$.

Los niños saben que $3 \times 5 = 5 \times 3$ (una instancia específica que todavía no es álgebra) y pueden generalizar los patrones: para dos números cualquiera a y b, $a \times b = b \times a$.

Actividades

a) Trate de describir, con sus propias palabras y de forma escrita u oral, los patrones generalizados $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$.

b) ¿Cómo escribiría la siguiente generalización en el lenguaje del álgebra? 'Cuando se suma cero a un número, el resultado es ese número'.

c) Busque otros patrones en la matemática básicas que se puedan expresar de manera algebraica. Incluso en primer año de enseñanza básica se pueden encontrar patrones útiles.

Marcadores de posición

Los niños que han jugado juegos de tablero como *Serpientes y escaleras* comprenderán mejor las instrucciones: 'Tire el dado. Sea cual sea su posición en el tablero, se debe mover hacia adelante de acuerdo con el número que entrega el dado. El número que identifica su posición puede representarse con la letra S (si su nombre es Sergio, Sebastián, Selena o Sandra) y el número que dice en el dado como D. S y D son los marcadores de posición. Por medio de la fórmula S + D se puede saber la nueva posición de un jugador (supongamos que en la posición final no se encuentra en la base de la escalera o en la cabeza de la serpiente). Uno no tiene que conocer los números para seguir las instrucciones para mover las piezas.

Las planillas de cálculo, como Excel, por lo general utilizan marcadores de posición para llevar a cabo cálculos. Por ejemplo, si el número de la primera celda es N y el número en la segunda celda es M, ponga la diferencia, N - M, en la tercera celda. El juego de 'adivinar un número', el cual se describe en la página 252, es otro ejemplo en el que las letras se utilizan como marcadores de posición.

Relaciones

Los niños conocen el vínculo entre la edad de ellos y la de sus padres. Un niño puede reconocer fácilmente que su papá siempre será 30 años, digamos, mayor que él. Si él tiene 7 años, entonces su papá tendrá 37. Si él tiene 10 años, entonces su papá tendrá 40. La relación entre la edad del padre y la de su hijo en símbolos es P = H + 30, si la edad del papá se representa con una P y la del niño con una H. Por lo tanto, si conocemos la edad del padre, entonces podremos encontrar la edad del hijo. La relación entre las edades es P = H – 30. Las relaciones matemática abundan en la vida diaria de los niños, por lo que el profesor debería identificar aquellas que sus alumnos ya conocen para así utilizarlas en clases.

Lograr que los niños piensen de manera algebraica

Tres aspectos que subyacen el pensamiento algebraico en la enseñanza básica. Estos son:

- hacer y deshacer (trabajar de manera inversa).
- generalizar (articular patrones).
- expresar relaciones entre variables (concepto de función).

En la sección de tareas de enseñanza se entregan detalles.

Enfoques de enseñanza

A la hora de enseñar álgebra, se debería brindar a los niños oportunidades para que describan las situaciones problemáticas en palabras antes de presentar los símbolos y convenciones para su uso y las reglas de su manipulación.

Entregue a los alumnos ejercicios en los que participen en la búsqueda de patrones y relaciones, y en los que tengan que comunicar sus hallazgos (los patrones numéricos y relaciones numéricas entregan una base para enseñar álgebra).

- Reconozca los patrones y las relaciones, y saque generalizaciones de ellos.
- Utilice los símbolos y las notaciones para comunicar conceptos y procedimientos matemáticos.

Un enfoque de enseñanza	Ejemplo
1. Empiece con una instancia u observación que forme parte de las experiencias de los niños (por ejemplo, una situación concreta o un evento físico). Utilice las experiencias de los niños desde el primer año de enseñanza básica.	Relación entre los patrones de edad de los hermanos o los padres (ver las tareas a continuación)
2. Muestre una imagen del evento o de la observación (de ser posible). Imagen de un hermano	Diagramas que muestra cómo los patrones aumentan
3. Comente, analice y describa el evento o el comentario de manera intuitiva (con sus propias palabras).	¿Cuál es la edad de tu hermana? ¿Es siempre dos años más que tú? ¿Y qué pasará de aquí a diez años? Etc.
4. Desarrolle el patrón de forma sistemática (por ejemplo, utilice una tabla para dibujar el patrón entre la edad del hermano y la de la hermana).	10 12 (o 10 + 2) 11 13 (o 11+2) 12 14 (o 12 + 2) etc.

Un enfoque de enseñanza	Ejemplo
5. Prosiga con la actividad y describa este evento con un lenguaje ‘formal’.	Para encontrar la edad de mi hermana, tengo que sumar dos años a la mía. La edad de mi hermana es la mía más dos.
6. Finalmente, utilice representaciones simbólicas del evento o comentario.	$y = x + 2$

En resumen:

- Presente a los alumnos una situación que sea familiar para ellos.
- La situación se elige por su descripción algebraica.
- Los niños tienen que ‘descubrir’ el patrón.
- Los niños tienen que describir el patrón con un lenguaje normal.
- Represente la situación utilizando símbolos.
- Revise que la expresión algebraica sea correcta.

Actividades para aprender y enseñar álgebra

Las actividades de álgebra consisten en lograr que los niños utilicen las letras para representar números y adquieran una conciencia del método matemático que se simboliza por medio del uso de letras y números.

Se espera que los niños sepan cómo utilizar las letras para representar números generalizados, llevar a cabo sumas y restas simples de términos algebraicos, y evaluar expresiones sencillas (por medio de la sustitución de las incógnitas o variables con valores numéricos).

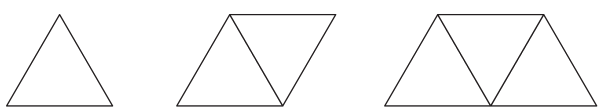
Tareas de enseñanza

Lleve a cabo estas tareas y discuta qué tan útiles son para ayudar a los niños a aprender álgebra. Trabaje en grupos. Por ejemplo, tome notas de lo que haría al momento de enseñar álgebra. Piense en otros ejemplos.

Ejemplo

Este ejercicio sirve para presentar el razonamiento algebraico.

- Estudie las cadenas de triángulos que se hacen con mondadientes en la figura a continuación y responda las preguntas.



1. Describa las figuras. ¿Existe un patrón? ¿Puede describir el patrón? Pretenda que se lo está describiendo a alguien que no logra ver los diagramas.
2. Haga lo mismo con las tres figuras que siguen. ¿Puede describirle a otra persona (que no puede ver los diagramas) cómo se tienen que hacer las otras tres figuras?
3. ¿Cuántos mondadientes se necesitan para la primera, la segunda y la tercera figura?
4. ¿Hay alguna forma rápida de encontrar el número de mondadientes que se necesitan para la décima figura? ¿Para la figura número 25? ¿Hay algún patrón que nos ayude?
5. Describa cómo va creciendo el patrón. [Pista: sume dos mondadientes al número total que se utilizaron en la figura inmediatamente anterior. ¿Cuál es el número de mondadientes en la figura inmediatamente anterior?]
6. ¿Qué pasa con la figura número 100? ¿Hay alguna forma sencilla de saber el número de mondadientes que necesitará la figura?
7. ¿Se puede escribir con símbolos? Pueden existir 'distintas' maneras de escribir.

- Preguntas
  1. ¿Cómo se logra que los niños piensen de forma algebraica en este ejercicio? Anote sus ideas en el espacio a continuación (por ejemplo, pedir a los niños que sigan los patrones y traten de compartir los nuevos patrones que han encontrado).
  2. ¿Cómo modificaría la tarea para cubrir las necesidades de los niños menos aptos para la matemática?

- Tareas

  Trabaje en grupos para encontrar otras cadenas usando cuadrados y pentágonos.

Ejemplo

¿Cuál es el número? Un ejercicio de hacer y deshacer

- Estoy pensando en un número. Le sume 5 y la respuesta es 19. ¿Cuál es el número?
- Estoy pensando en un número. ¿Cuál es el número si lo multiplico por 2 y sumo 5, y me da como respuesta 19? ¿Cuál es el número?

- Estoy pensando en un número. Le resto 3, lo multiplico por 2 y le sumo 5. La respuesta es 19. ¿Cuál es el número?

Los niños saben que hay un número que, por el momento, no se conoce, pero que se puede obtener revirtiendo el proceso. ¿En qué parte se hace y se deshace en el ejercicio? ¿Cómo se relaciona el proceso de 'deshacer' a la solución de las ecuaciones algebraicas? Una operación matemática tiene una operación correspondiente que revierte su resultado. Lo anterior lleva al concepto de una función inversa, al igual que a las ideas de 'implicar' e 'implicar e implicado por'.

Ejemplo

Este ejemplo ejercita el pensamiento algebraico con máquinas de 'funciones'. Aunque el concepto de función no se presenta formalmente en los primeros años, los niños igual pueden participar. Por supuesto, los profesores que utilicen esta actividad con niños de educación básica deberían utilizar el término 'función' por buenas razones pedagógicas.

Una máquina de funciones toma los números como información de entrada y, para cada número de entrada, se entrega otro número de salida de acuerdo con una regla fija. Por ejemplo, si la regla es 'duplicar el número y sumar 1', la máquina dará como resultado 3 cuando el número de entrada es 1, dará 7 cuando el número de entrada es 3, y así sucesivamente.

Los profesores deben preparar cartas para el juego de la máquina de funciones (o inventar un nombre para este juego), al igual que instrucciones para el juego. Las cartas pueden incluir funciones lineales $x + 2$, $3x$, Ax – 2, etc. Para adaptar el juego al nivel de los niños, elija una de entre las tres formas distintas de representar la relación:

- Frase: *Número de salida = tres veces el número de entrada menos 4*
- Notación con flechas:

$$\boxed{\text{Número de entrada}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{} \xrightarrow{\times 4} \boxed{\text{Número de salida}}$$

- Notación algebraica: $y = 3x - 4$
- Sugerencia

Toda la clase (ya sea que la guíe el profesor o los alumnos) o cada niño a su vez tiene que convertirse en la 'máquina de cálculos' de un grupo.

Hoja de instrucciones

Número de jugadores: 4

Materiales: cartas con reglas

Reglas del juego:

1. El alumno A selecciona una carta y mira las reglas entregadas. Los otros niños no pueden ver las reglas. El alumno A actúa como una máquina de funciones con esta regla.
2. Los niños, en turnos, dan un número de entrada y al alumno A da el número de salida según las reglas.
3. Los niños tratan de adivinar la regla. Desafío: La regla es... Si mi número de entrada es..., el número de salida es... El alumno A confirma si la regla es correcta; si no lo es, el juego continúa y los otros alumnos dan otros números de entrada.
4. El niño que dio la respuesta correcta interpreta el papel de la máquina (o el niño B lo hace).

- Pregunta

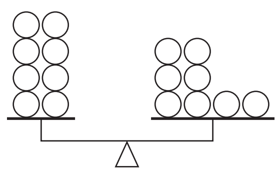
¿Dónde se encuentra el 'razonamiento algebraico' en este juego de máquina de funciones?

Acostumbrarse al símbolo igual

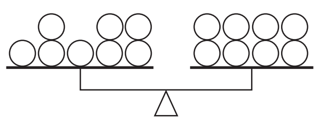
La actividad a continuación utiliza lo que ya conocen los alumnos respecto a la aritmética para extender el significado del signo igual.

- Comience con una oración numérica que contenga un signo igual, por ejemplo, 6 + 2 = 8.
- Utilice una balanza para ilustrar la igualdad.

Escriba otra frase numérica que tenga la misma operación (por ejemplo, suma) en ambos lados de la igualdad 3 + 5 = 4 + 4. Demuestre esta relación con una balanza. Siga con 3 + 5 = 5 + 3 (visualmente, para dar a entender la conmutatividad).



Modelo de balanza para 8 – 6 = 2



Modelo de balanza para 3 + 5 – 4 = 4

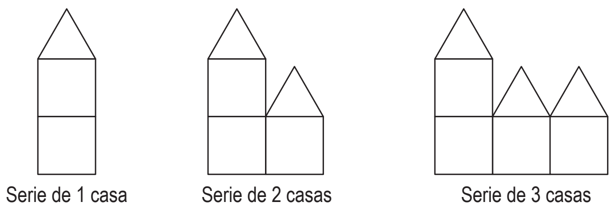
A continuación, escriba una frase que represente la misma igualdad utilizando una operación diferente. Por ejemplo, 3 + 5 = 10 - 2. Muestre la situación empezando con una desigualdad (desequilibrado) y luego remueva dos contadores para lograr la igualdad.

Los niños ya han aprendido el orden de la operación, por lo que la próxima oración numérica no debería ser tan difícil.

Escriba una frase numérica que represente la misma igualdad utilizando más de una operación aritmética. Por ejemplo, 3 + (6 – 1) = 3 x 3 – 1.

Tarea adicional: explore los patrones numéricos

Más abajo se muestran algunos patrones de casas hechos con mondadientes (o con materiales similares)



a) ¿Cuántos triángulos y cuadrados hay en una serie de 4 casas? ¿De 5 casas?

b) ¿Cuántos mondadientes hay en una serie de 4 casas? ¿De 5 casas?

Complete la tabla a continuación.

Nº de casas en la serie	1	2	3	4	5	...	8
N° de triángulos							
N° de cuadrados							
N° de mondadientes							

c) ¿Cuántos triángulos y cuadrados hay en una serie de 17 casas? Explique cómo obtuvo su respuesta.

d) ¿Puede decir el número de cuadrados si se sabe el número de triángulos?

e) ¿Cuántos mondadientes se necesitan para una serie de 17 casas? Explique cómo obtuvo su respuesta.

f) Escriba una frase que diga cuántos cuadrados habrán en una serie de casas de cualquier largo.

g) Escriba una frase que diga cuántos mondadientes se necesitan para una serie de casas de cualquier largo.

h) ¿Se puede hacer una serie con 69 cuadrados? ¿Por qué sí o por qué no?
i) ¿Cuántas casas habrán si la serie utiliza 54 fósforos? Explique cómo obtuvo su respuesta.
j) Si hay N triángulos, ¿cuántos cuadrados y cuántos mondadientes hay?
k) Si hay M cuadrados, ¿cuántos triángulos y cuántos mondadientes hay?
l) Si hay X mondadientes, ¿cuántos triángulos y cuadrados hay?

Tarea

¿Qué otras preguntas se pueden formular para lograr que los niños vean los patrones y piensen de manera algebraica? ¿Sobre qué habló o qué pensó cuando resolvía las tres últimas tareas?

Dificultades de los niños a la hora de aprender álgebra

Actividad

¿Qué dificultades piensa que un alumno tendrá al momento de aprender álgebra? Nombre aquellas que le ha tocado ver (durante su experiencia escolar, su práctica escolar o sus días de estudiante).

Preste atención a las dificultades que los niños tienen cuando trabajan (leen o escriben) con símbolos y notación matemática. En el lenguaje de los niños, puede que sea necesario decir 'dos veces el número de fichas menos una' o 'dos veces el número de filas de contadores y una más' para los números impares.

Las letras del alfabeto se utilizan de muchas maneras en la matemática de la enseñanza básica. Se utilizan para etiquetar puntos, describir triángulos, indicar ángulos, nombrar unidades (por ejemplo, segundos, metros y litros) y, en álgebra, para representar incógnitas o variables. Se tiene que tener presente que algunos niños encuentran complicada esta práctica.

En álgebra, y de acuerdo con el contexto, las letras tienen distintos significados. ¿Puede hacer una distinción entre ellos en las siguientes aseveraciones antes de ver las respuestas?

1) Encuentre x si $x + 5 = 7$.
2) Simplifique $a + 5a + 7a$ o $a + 5a + 7a = ?$
3) Si $p + (q + 60°) + (r + 30°) = 180°$, entonces $p + q + r = 90°$.
4) M y M + 1 son dos números naturales consecutivos.

Respuestas: (1) El valor de x es fijo. (2) La letra a es un objeto. (3) Las letras *p*, *q* y *r* no se tienen que evaluar o pueden tener más de un valor. (4) La letra M es una variable.

Tarea de Enseñanza

Considere cada una de las siguientes afirmaciones propuestas por los alumnos.

1. Usted no puede sumar $3a$ más $2b$ porque es como sumar 3 manzanas a 2 plátanos.
2. $x + 1 = 2$ es diferente a $y + 1 = 2$ porque x e y son letras diferentes.
3. Si se suma 4 a $3n$, se obtiene $7n$ (o $3n + 4$ se simplifica a $7n$).
4. Dado que treinta más dos es treinta y dos, $30 + x$ es $30x$.

a) ¿Por qué cree que un niño formula tal aseveración?

b) ¿Qué dificultades tendrá el alumno en álgebra si es esta la manera en la que considera las letras?

c) ¿Cómo afecta esto la enseñanza de las nociones iniciales de álgebra? ¿Cómo enseñaría esta materia ahora que ya sabe que los alumnos tienen tales conceptos errados?

Investigación sobre dificultades de aprendizaje en álgebra

Algunas de las dificultades ya se han mencionado. Incluyen el desafío de saber lo que las letras significan; cómo se escriben, se combinan o se utilizan de formas aceptable. La notación algebraica puede ser confusa cuando existe interferencia desde la convención aritmética (por ejemplo, $5ab$, $a(5b)$ y 526). También, y a diferencia de la aritmética, una respuesta en álgebra no tiene que estar en forma de número. De hecho, la respuesta no tiene que ser una letra ni una yuxtaposición de ellas (por ejemplo, $2ab$) sin símbolo de operación (por lo general más o menos), pero dejándolo como es (por ejemplo, $2y + x$ o $8 - 3u$). De igual manera, el mismo valor o relación se puede expresar de más de una forma.

En aritmética, la atención de los niños se centra en los números, para llevar a cabo la operación y obtener un resultado de la operación. En álgebra, el foco reside en la expresión de relaciones y procedimientos.

En aritmética, el signo igual, '=', funciona como una forma de instrucción para hacer algo y obtener una respuesta. En álgebra el signo igual denota equivalencia, la que es bidireccional.

Por ejemplo, la expresión '3 + 5' por lo general muestra a los alumnos las instrucciones para sumar los dos números, lo que da como resultado 8. No obstante, en álgebra, la expresión 'a + 5' indica un número que es 5 veces mayor que el número a, es decir, la suma entre el número a y el 5. Por lo tanto, a + 5 representa un número al igual que un proceso de sumar dos números. Es posible que los niños que no comprendan bien traten de sumar los números. Sus intentos pueden llevarlos a inventar una forma más sensata de denotar la suma como 5a, como en 20 + 8 = 28, o sencillamente colocando dos símbolos juntos como '*a*5'. Para ellos, es difícil dejar una expresión como a + 5 (es decir, un número que es 5 más que *a*).

La forma en que se leen o se recitan las expresiones algebraicas puede ser ambigua cuando no se escribe. Cuando las expresiones $x + y^2$ y $(x + y)^2$ se dicen en voz alta y no se cuenta con el apoyo escrito, pueden sonar iguales para a oídos inexpertos. De hecho, si la pausa se hace en el lugar equivocado, por ejemplo, se lee '*a* más *b*', pausa, y luego 'por *c*', la expresión $a + b \times c$ puede pasar por $(a + b) \times c$ si no se cuenta con la ayuda de una forma visual. Por el contrario, ¿debería un profesor decir: 'La suma de *a* y el producto de *b* y *c*'?

En la etapa en la que los alumnos están pasando de la aritmética al álgebra, les puede resultar difícil utilizar letras para representar números. Ellos también consideran que es difícil dar sentido a lo que parece ser aritmética, la que se hace con símbolos: letras y numerales.

Las reglas básicas de los números, que son la base de las manipulaciones algebraicas, pueden ser difíciles de entender. Si no entienden el significado de las letras (como se utilizan en álgebra) y los procedimientos para trabajar con estas letras, los niños utilizarán formas extrañas de mover los símbolos. En sexto básico, se espera que los niños en Singapur interpreten letras como incógnitas específicas. En los primeros años de la educación media, se espera que puedan interpretar letras como números generalizados y como variables.

Finalmente, los niños tienen dificultades con el álgebra sencillamente porque no entienden para qué sirve el álgebra.

Una pequeña charla matemática

- La igualdad es una relación de equivalencia reflexiva, simétrica y transitiva.
- Reflexiva significa que *a* es igual a sí misma o $a = a$.
- Simétrica significa que si un número *a* es igual a otro número *b*, entonces *b* es igual a *a* o, en símbolos, si $a = b$, entonces $b = a$.
- Transitiva significa que si un número *a* es igual a un número *b*, y el número *b* es igual al número *c*, entonces $a = c$.

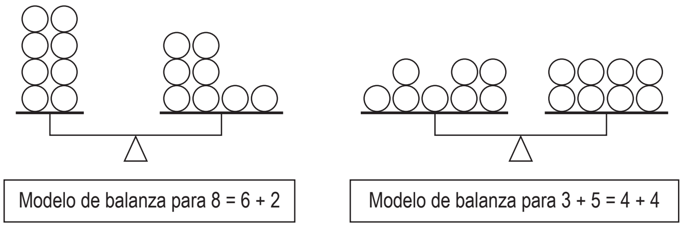
Tenga en cuenta que hay relaciones que no son relaciones de equivalencia. Por ejemplo, la relación 'mayor que...' es transitiva, pero no es ni reflexiva ni simétrica.

Pensar

Piense en algunas relaciones matemática que los niños conozcan y revise si ellas son relaciones de equivalencia. Vuelva hasta primero básico, o antes.

Además, en álgebra, la relación simétrica de a = b implica que b = a, da origen a igualdades tales como 8 = 6 + 2 o 3 + 5 = 4 + 4. Un pequeño acto de equilibrio (descrito a continuación) debería ayudar a los niños a familiarizarse con las expresiones como la anterior.

Un acto de equilibrio



La balanza ayuda a promover el símbolo '=' como equivalencia.

Las ayudas visuales de arriba deberían servir de apoyo a los niños al momento de concebir el signo igual como un indicador de 'equilibrio' o equivalencia, y no como una instrucción para hacer algo.

Comprender implícitamente la propiedad transitiva de '=' como una relación de equivalencia ayuda a los niños a la hora de manipular símbolos de forma algebraica.

Pensar

Piense en algunos ejemplos para ilustrar el uso de la propiedad transitiva en las manipulaciones algebraicas.

Referencias

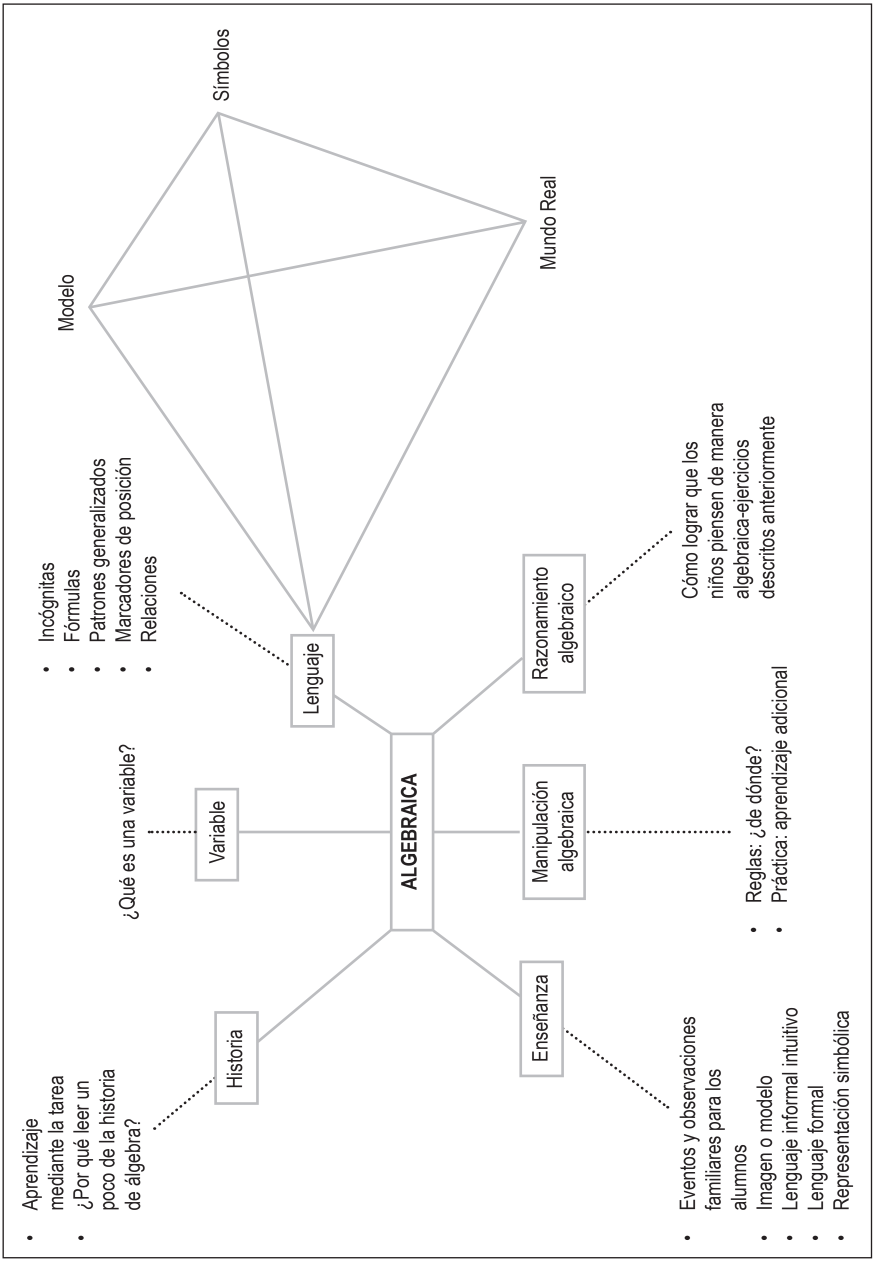
Departamento de Planificación y Desarrollo Curricular (DPDC). (2000). *Mathematics syllabus-primary 2001*. Singapur: Ministerio de Educación.

Fuentes de lectura complementaria

Fong, H. K. & Chong, T. H. (1995). Solving algebraic word problems. *Mathematics Teaching*, 151, 34-35.

Fong, H. K. (1994). Bridging the gap between secondary and primary mathematics. *Teaching and Learning*, 14, 73-84. Singapur: Instituto Nacional de Educación.

Anexo 13-1


Símbolos
Modelo
Mundo Real
ALGEBRAICA
Lenguaje
• Incógnitas
• Fórmulas
• Patrones generalizados
• Marcadores de posición
• Relaciones
Variable
¿Qué es una variable?
Historia
• Aprendizaje mediante la tarea
• ¿Por qué leer un poco de la historia de álgebra?
Razonamiento algebraico
Cómo lograr que los niños piensen de manera algebraica-ejercicios descritos anteriormente
Manipulación algebraica
• Reglas: ¿de dónde?
• Práctica: aprendizaje adicional
Enseñanza
• Eventos y observaciones familiares para los alumnos
• Imagen o modelo
• Lenguaje informal intuitivo
• Lenguaje formal
• Representación simbólica

Capítulo 14

La enseñanza de tasas y velocidad

Yeo Kai Kow, Joseph

Introducción

Supongamos que desde un grifo fluye agua hacia un estanque a 30 litros por minuto. Decimos que el agua fluye a una tasa de 30 litros por minuto (30 litros/min). En este caso, la palabra 'tasa' se utiliza para mostrar cómo varía el flujo de agua con el tiempo. Además, la palabra se utiliza para mostrar la relación entre dos cantidades. Otro ejemplo similar: un auto recorre una distancia de 60 km en 1 hora. Decimos que el auto se desplaza a una tasa de 60 km/h o que la velocidad del auto es de 60 km/h. La velocidad es, de hecho, una forma de tasa en donde las dos cantidades que se comparan son la distancia y el tiempo. La velocidad es un ejemplo importante de tasa.

Conceptos clave

Una tasa es una comparación entre dos cantidades donde las unidades se incluyen y la unidad de comparación es 1. En otras palabras, una tasa se compone de dos cantidades, en donde una cantidad se expresa por unidades de otra. Cuando el segundo término es uno, la tasa se denomina tasa unitaria. Una rueda que gira a 16 revoluciones por segundo y una fotocopiadora que imprime 40 copias por minuto son ejemplos de tasas unitarias. Si se conoce la tasa y una de las cantidades, es posible encontrar la otra cantidad. El uso de las tasas en la vida diaria (por ejemplo, tasas de cambio y tasas de interés) por lo general implica el uso de varias tasas diferentes.

1. *Notación de la tasa*

   La palabra 'por' o el símbolo '/' se utiliza para indicar una tasa. Por ejemplo, podemos decir \$ 300 por hora o \$ 300/hora. También significa $ 300 por cada hora. '/hora' significa por hora. Es importante establecer las unidades de las tasas.

2. *Velocidad*

   La velocidad se utiliza para denotar que tan rápido o lento se mueve un objeto. Cuando un objeto se mueve, la tasa de la distancia que recorre por unidad de tiempo es lo que llamamos velocidad.

   Velocidad = $\frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}$.

   La formulas se pueden considerar en términos de unidades, por ejemplo, si la velocidad se expresa en km/h, esta unidad debe provenir de dividir una distancia (km) por un tiempo (horas).

3. *Velocidad uniforme*

   Si la velocidad de un auto es la misma a lo largo de un intervalo de tiempo, podemos decir que el auto se desplaza a una velocidad uniforme durante ese intervalo. Se pueden utilizar muchos otros términos como sinónimos de esta expresión, tales como velocidad constante, velocidad permanente, velocidad fija y velocidad dada. A pesar de que la velocidad uniforme no es usual en nuestras vidas cotidianas, esta sí ocurre. Por ejemplo, el planeta tierra gira alrededor del sol a una velocidad constante. Un tren también se desplaza a una velocidad uniforme durante la mayor parte de su recorrido, a excepción de cuando comienza a moverse o detenerse.

4. *Medición de la velocidad*

   El velocímetro es un instrumento que se encuentra dentro de un vehículo motorizado y que indica la velocidad del vehículo en todo momento. Cuando el vehículo se mueve, la aguja del velocímetro se mueve para indicar la velocidad de desplazamiento del vehículo.

5. *Velocidad promedio*

   En la realidad, no podemos desplazarnos a una velocidad constante durante horas. Siempre habrá instancias en que será necesario acelerar o frenar. Por esta razón utilizamos la 'velocidad promedio' en vez de la velocidad misma para dar una mejor idea de qué tan rápido o lento se desplaza un cuerpo a lo largo de una distancia en un tiempo determinado. Por lo tanto, podemos obtener la velocidad promedio mediante esta fórmula.

   Velocidad promedio = $\frac{\text{Distancia total recorrida}}{\text{Tiempo que se demoró en recorrer la distancia}}$.

Dificultades de aprendizaje

Para saber más, converse con sus alumnos después de haber corregido sus pruebas y ejercicios. La mayoría de los errores que cometen los alumnos tienen su justificación en las nociones erróneas que tienen debido a diversas razones, y no porque hayan sido descuidados. A continuación se mencionan algunos errores y dificultades de aprendizaje comunes.

1. Algunos alumnos tratan de resolver un problema de tasas utilizando los números en el orden que se presentan en el problema verbal. A veces sus respuestas son incorrectas. Por ejemplo, Pedro recibe $100 en dos días. ¿Cuánto recibirá en una semana?

$$100 \rightarrow 2$$
$$7 \rightarrow \frac{2}{100} \times 7 = \$\frac{7}{50}$$

2. A algunos alumnos les puede costar entender las tasas consecutivas. Es posible que tomen la tasa de un valor anterior o tomen el valor prorrateado de las tasas consecutivas. Por ejemplo, en la tabla se muestran las tasas de costo de envío de correo.

Peso máximo por categoría	Costo de envío
20 g	$23
40 g	$31

Indique el costo de envío de una carta que pesa 30 g.

31 pesos – 23 pesos = 8 pesos
8 pesos ÷ 20 = 0,4 pesos
0,4 pesos × 10 = 4 pesos
23 pesos + 4 pesos = 27 pesos

o

31 pesos ÷ 40 = 0,775 pesos (por 1 g)
0,775 pesos × 10 = 7,75 pesos
23 pesos + 7,75 pesos = 30,75 pesos

3. Con frecuencia surgen confusiones por las diferencias entre la velocidad uniforme y la velocidad promedio.
4. El uso de una fórmula incorrecta para convertir la velocidad, distancia y tiempo puede causar problemas. Por ejemplo, la velocidad = $\frac{\text{Tiempo}}{\text{Distancia}}$, velocidad = distancia x tiempo, en vez de velocidad = $\frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}$.

5. Es posible que los alumnos calculen la velocidad promedio para todo el viaje calculando el promedio de las velocidades para las diferentes partes del viaje (es decir, lo calculan de la misma manera que para obtener otros promedios).

Enfoques pedagógicos

1. Presente el término 'tasa' a los alumnos y de ejemplos de tasas. Después pida a los alumnos que den ejemplos de tasas. Es importante volver a los niños conscientes de la presencia de las tasas en la vida cotidiana, para que así entiendan el concepto plenamente. Algunos ejemplos son la tasa de:
   - consumo de bencina (kilómetros/litros)
   - escribir en el computador (número de palabras/minuto)
   - flujo de agua de un grifo (litros/minuto)
   - tarifas en un estacionamiento (pesos/hora)
2. Pida a los alumnos que identifiquen ejemplos de tasas en sus vidas diarias. Por ejemplo, aliéntelos a que observen con detención cuando vayan al supermercado y pídales que busquen anuncios en el periódico en donde se utilicen tasas.
3. Enfatice la importancia de encontrar la tasa por unidad. Por ejemplo, si María trabaja 40 horas por semana y le pagan $ 80.000 pesos ¿cuánto le pagan por hora? Por lo tanto, tenemos que convertir la tasa de su sueldo en pesos por hora, lo que se obtiene al dividir 80 000 por 40.
4. Pida a los alumnos que escriban aseveraciones para vincular las cantidades relacionadas. Esto es importante, pues permite a los alumnos entender y dar sentido al problema de tasas.
5. Muestre a los alumnos cómo se pueden resolver los problemas de tasas con diagramas de flechas (enfoque unitario). Por ejemplo, un auto recorre 405 km con 45 litros de bencina. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 30 litros de bencina?

   45 litros $\rightarrow$ 405

   1 litro $\rightarrow$ $405 + 45 = 9$ km

   30 litros $\rightarrow$ $30 \times 9 = 270$ km

   El auto puede recorrer 270 km con 30 litros de bencina.
6. Resuelva problemas de tasas con la ayuda de un modelo de recta (comparar las cantidades). Por ejemplo, desde un grifo fluye agua

hacia un estanque a una tasa de 20 litros por minuto. ¿Cuánta agua puede contener el estanque luego de 8 minutos?

El modelo de recta se puede interpretar como:

1 min → 20 litros

8 min → 8 × 20 = 160 litros

7. Explique la expresión 'peso máximo por categoría'. Significa que el peso máximo de una carta o encomienda que uno pagará con un precio dado. Pro ejemplo, en la tabla se muestran las tasas de costo de envío de correo en Singapur.

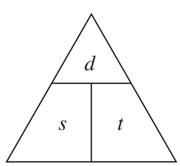
Peso máximo por categoría	**Costo de envío**
20 g	\$23
40 g	\$31
100 g	\$50
250 g	\$80
500 g	\$100

Muestre a los alumnos cómo interpretar la tabla indicando las distintas tarifas de envío.

De acuerdo con estas tarifas, los cargos son:

- \$23 para un peso de hasta 20 g. Si la correspondencia pesa menos de 20 g, el costo de envío es \$23 pesos.
- \$31 para un peso por sobre los 20 g pero hasta 40 g
- \$50 para un peso por sobre los 40 g pero hasta 100 g
- \$80 para un peso por sobre los 100 g pero hasta 250 g
- \$100 para un peso por sobre los 250 g pero hasta los 500 g

8. La velocidad, la distancia y el tiempo conforman una triada de multiplicación y división. Los alumnos pueden utilizar el siguiente diagrama como ayuda para recordar la relación entre velocidad, distancia y tiempo.



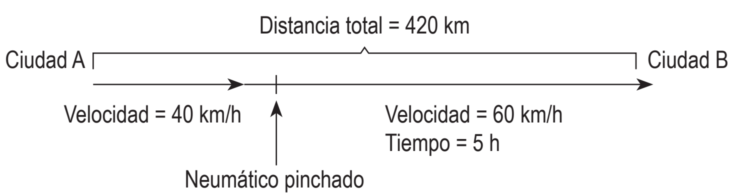
9. Pida a los alumnos que escriban y lean unidades de velocidad. Por ejemplo:

Unidad de velocidad	Se utiliza para referirse a la velocidad de
km/h	Autos, furgones, camiones, buses, aviones, motocicletas, trenes
m/min	Caminata rápida, trote, nadar, andar en canoa
cm/s	el paso de una hormiga

10. Ayude a que los niños intuyan la fórmula de la velocidad. Por ejemplo, si un auto acelera, ¿qué ocurrirá con el tiempo que se demora en completar el viaje? Si un auto avanza a la misma velocidad en dos viajes, pero en uno se demora la mitad del tiempo en llegar al destino, ¿qué nos puede decir esto acerca de la distancia que recorre?
11. La velocidad es un ejemplo de tasa. Resolver los problemas de velocidad de la misma manera que se resuelven problemas de tasas solo se recomienda al principio, cuando el concepto de velocidad se presenta por primera vez. No obstante, se debería alentar a los alumnos a que utilicen la fórmula, pues los problemas de velocidad suelen ser más complejos debido a que su resolución toma más de dos pasos.
12. Cuando se resuelven problemas de velocidad, que suelen ser más complejos y de más de dos pasos, es necesario dibujar diagramas. Ayude a los alumnos a visualizar el problema organizando la información entregada en un diagrama.

    Por ejemplo, el señor López se demoró en total $8\frac{2}{5}$ h en viajar desde la ciudad A a la ciudad B, que se encuentran a una distancia de 420 km. Después de recorrer parte del viaje a una velocidad constante de 40 km/h, a su auto se le reventó un neumático. Una vez repuesto el neumático, se demoró otras 5 horas en completar el viaje a una velocidad promedio de 60 km/h. ¿Cuánto se demoró en cambiar el neumático? (Dar la respuesta en minutos).

Tiempo total: $8\frac{2}{5}$ horas



Distancia recorrida después de que el señor López cambió el neumático = 60 × 5 = 300 km

Distancia recorrida durante la primera parte del viaje = 420 – 300 = 120 km

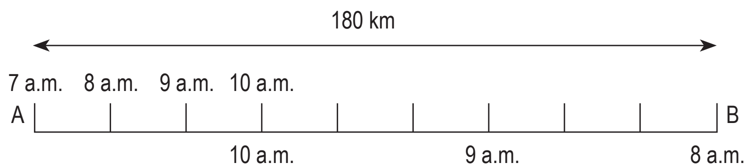
Tiempo que tomó la primera parte del viaje = 120 ÷ 40 = 3 h

Tiempo total que se demoró el señor López en cambiar el neumático $= 8\frac{2}{5}\text{h} - (5\text{h} + 3\text{h}) = \frac{2}{5}\text{h} = 24$ min.

13. A continuación se muestra, con la ayuda de un diagrama, otro ejemplo que ilustra dos objetos que se mueven en direcciones opuestas.

    La distancia entre la ciudad A y la ciudad B es 180 km. Raúl anduvo en bicicleta desde la ciudad A a la ciudad B a una velocidad uniforme. Partió a las 7 de la mañana. Gonzalo partió desde la ciudad B a las 8 am. Recorrió el camino en auto en dirección a la ciudad A a una velocidad uniforme. Se cruzaron a las 10 am. Si la velocidad de Gonzalo es 3 veces las velocidad de Raúl, ¿cuál es la velocidad de Gonzalo y Raúl en km/h?

    Marca la posición de Raúl y Gonzalo en la línea AB a las 7 am, las 8 am y las 10 am.



AB = 180 km

9 unidades → 180 km

3 unidades → 60 km

Velocidad de Gonzalo = 60 km/h y la velocidad de Raúl = 20 km/h

Ejemplo de actividades para alumnos

1. ¿Qué unidad es más apropiada para cada una de estas actividades?
   a) Correr
   b) Salario
   c) Pulso cardíaco
   d) Agua que fluye hacia un estanque
   e) El costo de una cinta
   f) Llamadas por celular

2. Muestre a los alumnos las cuentas de cobro de la electricidad, gas o agua. Pida a los alumnos que encuentren las tasas para los cargos de las cuentas de agua, electricidad y gas. Como desafío, pregunte a los alumnos por qué los cargos no se fijan por unidad.
3. Fomente el debate entre los alumnos respecto a las dos preguntas a continuación. Pida a los alumnos que respondan según lo que hayan debatido.
   a) ¿Cómo relacionarías lo que has aprendido sobre las tasas en tu vida diaria?
   b) ¿Por qué es importante aprender sobre las tasas?

Ejemplo de actividades para profesores

1. Cuando uno va al doctor, lo más probable es que el doctor nos mida el pulso cardíaco. Esto se puede hacer al presionar dos dedos de la mano izquierda contra la arteria en la muñeca derecha. Comience a contar el número de pulsos que se sienten y deje de contar después de 15 segundos (esto es lo que hace el doctor).
   a) ¿Cuántos latidos contó?
   b) ¿Cuál es el ritmo cardíaco en latidos/minuto (este es el ritmo cardíaco en reposo)?
   c) Ahora trote en su lugar por exactamente 2 minutos.
   d) Mídase el pulso nuevamente.
   e) ¿Cuál es el ritmo cardíaco en latidos/minuto ahora (este es el ritmo cardíaco activo)?
   f) Piense en al menos dos preguntas que podría hacer a los alumnos si es que completan esta actividad.
2. Tome una botella de agua de 1000 ml vacía y registre el tiempo (en segundos) que toma rellenar la botella con agua bajo el grifo en los baños de la escuela.
   a) Exprese la tasa del flujo de agua de la fuente en ml/segundo y ml/minutos
   b) Compare su resultado con los resultados de otros miembros del grupo. ¿Son iguales? De no ser así, ¿qué factores cree usted que afecta el resultado?
3. Para entender la relación entre distancia, velocidad y tiempo, utilice el software de simulación que se encuentra en http://standards.nctm.Org/document/eexamples/chap5/5.2/index.htm#APPLET.

Capítulo 15

La enseñanza de la manipulación de datos

Chua Kwee Gek

Introducción

Scheaffer (2000) definió la estadística como un proceso del pensamiento a lo largo de un problema, desde su formulación hasta su esclarecimiento, datos, análisis y conclusión. En esta era de la información, inculcar habilidades relacionadas con los conocimientos estadísticos es esencial. Los niños tienen que entender la conexión entre la estadística y el mundo exterior. La estadística provee un *contexto significativo* para promover la resolución de problemas y el pensamiento crítico, la comunicación, el desarrollo de un sentido numérico y la aplicación de habilidades de cálculo. El aprendizaje de la estadística debería incluir ideas y aplicaciones de la estadística que los niños encuentren en la vida diaria. También debería conectarse o integrar otros temas matemáticos o asignaturas escolares. La información numérica por lo general se representa de forma visual por medio de su organización en tablas o gráficos; es decir, implica la comunicación de ideas, tanto a la hora de comprender el problema práctico con el que comienza el proceso y de formular conclusiones que otros puedan comprender. Por lo tanto, Scheaffer (2000) indica que los profesores de matemática deberían entender el proceso de razonamiento estadístico, al igual que las componentes de la metodología estadística que puedan llegar a utilizar. En este caso, el proceso es más importante que las partes.

Gelman, A. y Nolan, D. (2002) hacen eco al decir que la estadística nos sirve para tomar decisiones, tanto a nivel personal como público, al igual que para entender el mundo. Por lo tanto, tenemos que tener presente los errores de información en la 'comunicación estadística'. Ellos deberían ser capaces de evaluar la información estadística de forma crítica: formular preguntas tales como, '¿se hizo algún ajuste con respecto a lo que se utilizó como punto de referencia? y '¿se ha suprimido información de manera intencional?'

Conceptos clave

1. Utilizar conceptos estadísticos como una herramienta para el trabajo en proyectos.
2. Utilizar gráficos para representar los datos recopilados. Un gráfico es una representación visual de datos.
3. Gráficos de imágenes:
   - organiza y presenta los datos de forma visual (usualmente mediante el uso de símbolos).
   - la clave o leyenda indica el valor de un símbolo.
   - características: título, símbolos, leyendas, escalas.
4. Gráficos de barra:
   - utiliza barras paralelas, ya sean horizontales o verticales, para representar los conteos de las distintas categorías.
   - sirve para mostrar la relación entre grupos.
   - se utiliza una barra para cada categoría, donde el largo de la barra representa el conteo de esa categoría.
   - características: título, altura y largo de las barras representa la cantidad, todas las barras tienen el mismo ancho, las barras tienen el mismo espacio entre ellas, escala.
5. Gráficos de línea:
   - muestra los datos que se recolecten durante un periodo de tiempo para mostrar cómo estos cambian a intervalos regulares.
   - muestra cómo una variable (es decir, una variable independiente) se ve afectada por otra (variable dependiente) a medida aumenta/disminuye (por ejemplo, muestran tendencias de los datos de forma clara).
   - características: título, pares ordenados unidos por líneas rectas (y no una curva suave).
   - permite que las personas que lo ven puedan hacer predicciones sobre los resultados de los datos.
6. Gráficos circulares:
   - gráficos que no necesitan el uso de ejes.
   - muestran cómo una parte de algo se relaciona con el entero; es importante definir qué es el 'entero' (por ejemplo, comparar las distintas partes del mismo entero).

- muestra números, fracciones o porcentajes.
- características: título, zonas sombreadas y etiquetadas para los componentes representados.

7. Promedio (media aritmética):
   - es una cifra representativa de un conjunto de datos numéricos.
   - es el punto de equilibrio de un conjunto de datos dado.
   - se obtiene mediante el proceso de 'nivelación' (es decir, se reúnen todos los datos individuales y luego se comparten equitativamente; la suma de los datos antes y después de la 'nivelación' es la misma).
   - se encuentra entremedio de los valores de datos más altos y los más bajos.
   - puede ser el mismo que uno de los valores de datos dados.
   - puede ser un decimal, aun cuando cada uno de los datos es un número natural.
   - se ve afectado por la presencia de valores extremos.
   - es una de las tres medidas de tendencia central: media o promedio, mediana y moda.
   - permite hacer comparaciones entre distintos conjuntos.

Dificultades de aprendizaje

Gráficos

Algunos alumnos:

1 no están conscientes de que los gráficos de imágenes/barras horizontales y verticales pueden representar la misma información.
2. tienen dificultades para encontrar información en los gráficos y para leer el conteo (frecuencia) de la columna/fila correcta.
3. no pueden elegir la información que se necesita del gráfico para responder las preguntas.
4. tienen dificultades al interpretar la información en los gráficos de barras cuando una categoría tiene un conteo de cero.
5. tienen problemas al leer los valores que no se encuentran indicados en el eje de frecuencia en los gráficos de barras/líneas.
6. no son capaces de decodificar los gráficos de imágenes/barras con escalas.
7. representan los datos recolectados con los gráficos incorrectos.

Promedio

Algunos alumnos:

1. no consideran que el cero o mediciones/números repetidos son parte del conjunto de datos.
2. no son capaces de distinguir entre categoría de elementos/mediciones y número de elementos/mediciones.

Enfoques pedagógicos

1. Brinde a los niños experiencia práctica en el manejo de datos por medio de las cuatro etapas: presentar un problema, recolectar y organizar datos, representar e interpretar los datos y sacar deducciones de los datos. La Ilustración 15-1 representa este ciclo.

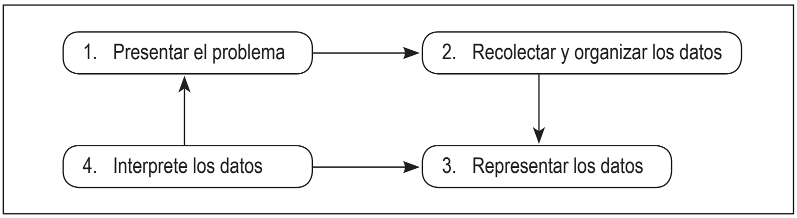


Ilustración 15-1 Ciclo de manipulación de datos

Etapa 1: Se empieza estableciendo una meta de investigación con sentido para responder un

conjunto específico de preguntas relacionadas a un problema. Verifique que todos tienen claro cuáles datos son los necesarios para la investigación.

Etapa 2: Decida cómo se recolectarán los datos; por ejemplo, mediante un cuestionario.

Organice los datos.

Etapa 3: Elija los medios correctos para presentar o mostrar los datos, los que deben ajustarse al propósito.

Etapa 4: Haga hincapié en la importancia de la representación clara y concisa de los datos. Interprete y haga deducciones.

El ciclo se completa después de la etapa 4. No obstante, a veces una o más preguntas emergen a medida que el proceso de investigación avanza, por lo que se debe regresar a la pregunta original para volver a revisar los datos del ciclo de manipulación nuevamente.

2. Enseñe a los niños más jóvenes la técnica para llevar cuentas, para que así la puedan utilizar durante la etapa de recolección de datos.
3. Primero presente datos discretos con categorías no numéricas antes de manipular datos discretos con categorías numéricas.
4. Inste a los alumnos a aprender nociones de estadística y fomente el razonamiento estadístico en ellos por medio de recursos proveniente de los medios de comunicación (tales como periódicos, anuncios y revistas).
5. Utilice programas de computación adecuados (por ejemplo, 'The Graph Club' [El club del gráfico], Microsoft Excel o sitios web tales como http://nces.ed.gov/nceskids/createagraph), como herramientas para representar los datos recolectados.
6. Al trabajar en la comprensión del promedio (media), establezca el vínculo con el concepto familiar de distribución equitativa o repartición. El promedio describe un conjunto de datos donde cada dato se 'nivela' o es exactamente como los otros.
7. Interprete el promedio (media) como un 'punto de equilibrio' de un conjunto de datos.

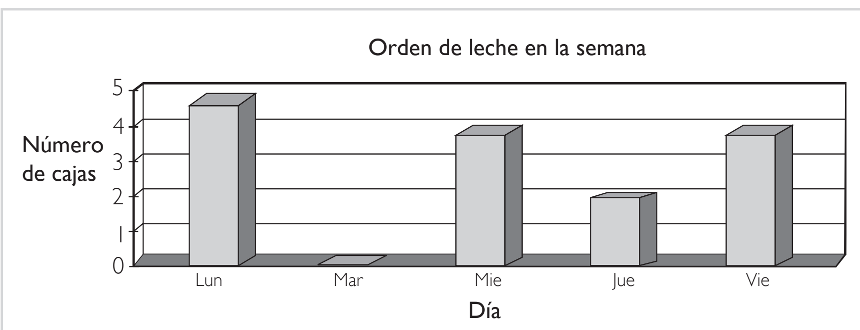
Ejemplo de actividades para estudiantes/profesores

Estas actividades evalúan el conocimiento en términos de razonamiento estadístico que tienen los estudiantes/profesores.

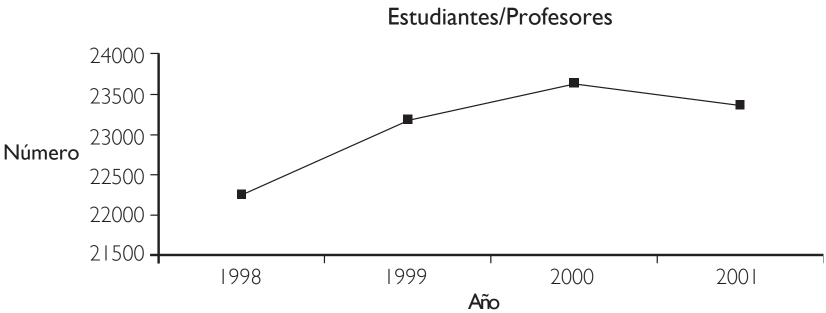
Actividad 1

Sentido de los datos [gráficos 3-D solo para actividades de estudiantes/profesores]

1. ¿Cuántas cajas individuales de leche beben los niños cada día?

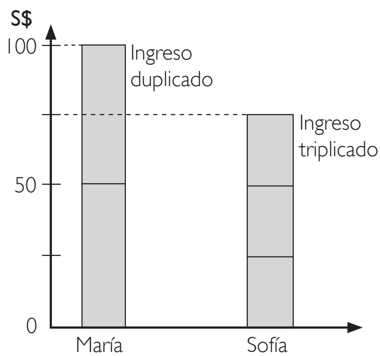


2. Haga comentarios sobre el gráfico.

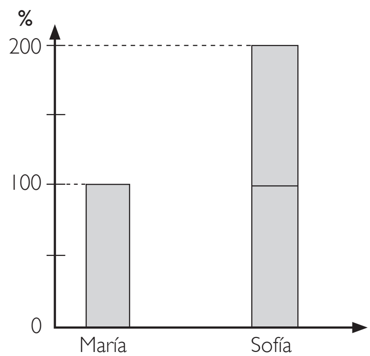


3. Haga comentarios sobre los gráficos.

(i)



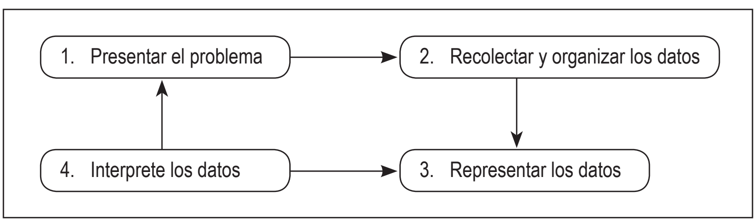
(ii)



Actividad 2

Para adquirir un razonamiento estadístico.

- Siga las instrucciones para completar la tarea estadística.
  1. El proceso de manipulación de datos por lo general se presenta como un proceso circular, como se indica en la siguiente ilustración.



2. Utilice la ilustración como soporte a la hora de escribir un informe (a modo de hoja de trabajo) sobre un problema que haya elegido.

   Por ejemplo, su problema podría ser encontrar los gustos deportivos de niños y niñas. Se tiene que diseñar una hoja de trabajo con un gráfico adecuado para el nivel determinado.
3. Para cada etapa en el ciclo, se debe entregar la siguiente información:
   - *Presentar el problema*: identifique la pregunta. Por ejemplo, el problema de su tarea puede ser: '¿Disfrutan los niños y las niñas de deportes distintos?'

     Recolectar y organizar la información: entregue información sobre cómo recolectó y organizó los datos de su problema.
   - *Representar los datos*: seleccione un modo de representación para representar los datos recolectados utilizando Microsoft EXCEL. Justifique su elección del modo de presentación.
   - *Interpretar y hacer deducciones de los datos*: lea e interprete el gráfico que se ha dibujado en la etapa 3. (Incluya cinco preguntas en la hoja de trabajo, las que se pueden contestar con el gráfico que usted ha dibujado. La pregunta 5 debe ser una pregunta de inferencia).
   - ¿Qué conclusiones se pueden sacar de los datos cotejados?

Actividad 3a

Esta actividad permite aprender más sobre las nociones estadísticas. Los estudiantes/profesores tienen que encontrar artículos de su interés, especialmente aquellos artículos que tratan sobre la actualidad noticiosa. Tienen que leer los artículos con atención y preparar un resumen del artículo de investigación. Al momento de escribir el resumen, deben tener presente los siguientes puntos:

- ¿Qué tan preciso refleja el título los principales hallazgos?
- Si le piden que entregue toda la información importante de este artículo en un párrafo corto, ¿qué diría? Explique sus razones para seleccionar la información.

Actividad 3b

Solo para estudiantes/profesores.

A continuación se muestran los resultados de unas pruebas de tiempos de reacción de un grupo de atletas antes y después de la semana de entrenamiento.

Atleta	Antes	Después
A	47	38
B	47	38
C	49	38
D	51	40
E	51	41

a) ¿Qué tipo de gráfico utilizará para representar los datos de forma gráfica, para que se pueda llevar a cabo una comparación de los conjuntos de resultados? ¿Por qué?
b) Calcule la media y la mediana para encontrar el tiempo de reacción antes y después del entrenamiento de tres sujetos significativos.
c) Explique por qué la moda no es adecuada para el cálculo del tiempo de reacción requerido.
d) Calcule los rangos y explique las diferencias.

Ejemplo de actividades para alumnos

Estas actividades sirven para que los niños ejerciten su razonamiento estadístico.

Actividad 4

Haga uso de actividades similares a la Actividad 2 para estudiantes/profesores. Los profesores tienen que guiar a los alumnos en cada etapa del ciclo de manipulación de datos. Entre los problemas que se deben resolver, se podrían incluir preguntas como: '¿Cuál es el color favorito de la clase?' Entregue materiales concretos, tales como cubos de lego, a los niños en los primeros años de enseñanza básica. Así pueden dedicarse a apilar los cubos de acuerdo con el color. El concepto de representación de los mismos datos vertical u horizontalmente se puede ver reforzado por medio de la etapa concreta antes de la etapa pictórica.

Actividad 5a

Orientada a desarrollar el conocimiento estadístico de los alumnos.

Nombre:

Curso: **Fecha:**

¿Cuál de los siguientes juguetes tienen los niños de cuarto básico de su escuela: muñecas, autos de juguete, osos de peluche y LEGO®? Realice una encuesta para recolectar datos. Complete la siguiente tabla con sus hallazgos.

Clase/juguetes	Muñecas	Autitos de juguete	Osos de peluche	LEGO®
4° A				
4° B				
4° C				
4° D				
Total				

Utilice el programa de computador 'Graph Club' para representar sus hallazgos.

Procedimiento:

1. Haga clic en 'Create'[crear].
2. Ingrese los datos en la tabla.
3. Haga clic en el menú 'Graph'[gráfico] y seleccione el número de símbolos que corresponda a su gráfico.
4. Haga clic en el menú 'Graph > Make Another Graph' [hacer otro gráfico] y seleccione el gráfico adecuado para mostrar los datos.
5. Haga clic en la opción 'Print' [imprimir]:

a) seleccione los gráficos que quiera imprimir.
b) otorgue un título para cada gráfico.
c) escriba una breve descripción del gráfico.

*Fuente: adaptado de Koay (1999)

Actividad 5b

Lea la historia. Tabule el número de libros que cada mago tomó. Utilice el gráfico apropiado para representar los datos recolectados.

Nombre:

Curso: **Fecha:**

Hace mucho tiempo vivía un gran mago. Su nombre era Frodo, el mago olvidadizo, porque era descuidado y distraído. Un día, cuatro magos jóvenes, Jacinta, Leonardo, María y Karen fueron a su casa para pedirle prestado libros sobre magias y hechizos. Dado que Frodo era una persona olvidadiza, trataron de engañarlo.

Jacinta	:	Yo tomé 12 libros del estante.
María	:	Yo tomé 4 libros menos que Jacinta.
Leonardo y Karen	:	la suma de los libros que tomamos es igual a los que tomó María.
Karen	:	Pero yo tengo tres veces más libros que Leonardo.
Todos ellos	:	En total tomamos 26 libros del estante.

1. ¿Están diciendo la verdad?
2. ¿Puedes ayudar a Frodo indicándole cuántos libros tomó del estante cada uno de ellos?

*Fuente: historia contribuida por Dip Ed 2003 grupo de admisión 3. Salina et al.

Actividad 5c

Las canciones apelan a todos. Aquellas canciones que tienen hartas repeticiones son especialmente atractivas para los niños más pequeños.

Nombre:

Curso: **Fecha:**

Cantamos nuestros deseos, cantamos nuestros deseos
Contamos nuestros deseos con alegría

www.ndp.org.sg/

1. Utilice las marcas de conteo para contar la veces que aparece cada palabra en el coro de la canción nacional.

Palabra	Marca de conteo	Número	Palabra	Marca de conteo	Número
Cantamos			Contamos		
nuestros			con		
deseos			alegría		

2. Visite el sitio web http://nces.ed.gov/nceskids/createagraph/.

   Seleccione el tipo de gráfico adecuado para representar los datos recolectados en el espacio a continuación.

3. Utilice el gráfico para contestar las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuántas palabras hay en el coro de la canción?
   b) ¿Cuántas palabras diferentes hay?
   c) ¿Cuáles palabras aparecen menos? ¿Cuántas veces aparecen?
   d) ¿Por qué cree que algunas palabras se repiten tanto en la canción?

*Fuente: http://www.ndp.org.sg/

Métodos concretos y visuales

La mayoría de los alumnos tendrán problemas para entender algunos conceptos. Por ejemplo, les puede parecer complejo el concepto de promedio como un número único que representa un conjunto de datos. Por lo tanto, es importante que los alumnos comprendan el término promedio en relación a un conjunto de datos por medio de distintas experiencias con diferentes datos haciendo uso de la manipulación concreta y visual antes de presentar el algoritmo. Los materiales didácticos que sirvan para presentar la noción del promedio incluyen cubos de lego o tiras de papel de color.

Actividad 5d

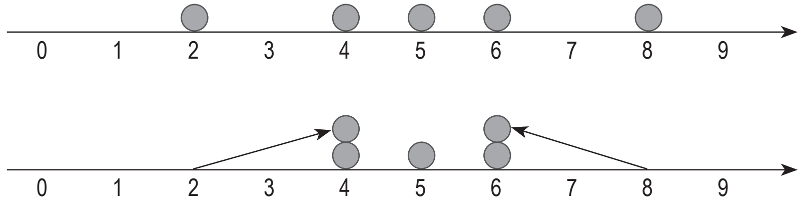
1. *El promedio se encuentra entre los valores de datos mayores y menores.*

   Entregue a los niños cubos de lego de distintas alturas: 3, 8 y 7. Pregúnteles qué tienen que hacer para que los tres sean de la misma altura. Deje que discutan entre ellos y expliquen el proceso.
2. *El promedio es uno de los valores de los datos entregados.*

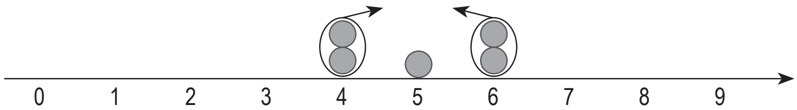
   Entregue a cada grupo de niños cuatro tiras de papel de distinto color; sus largos son 9 cm, 4 cm, 5, cm y 6 cm. Los niños tienen que debatir qué tienen que hacer para que las cuatro tiras de papel tengan el mismo largo. [No pueden cortarlas.]
3. *El promedio es el punto de equilibrio de un conjunto dado de datos.*

   El número de porciones de fruta a la semana para 5 alumnos son 8, 2, 4, 5 y 6. Primero, deje que los niños estimen el valor del promedio. Verifique el valor estimado utilizando la idea del arreglo asimétrico con el fin de encontrar el promedio con la ayuda de una recta numérica. [Entregue materiales concretos a los niños que aprenden mejor tocando las cosas, tales como aros, plasticina u otros similares].

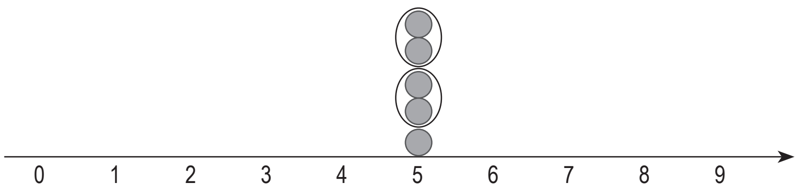
   Consideremos que los niños estiman un promedio de 5. Por lo tanto, el resto de los círculos debe avanzar hacia el 5.



Primero: cada círculo en cada lado de 5 (del 2 y 8) se mueven dos paso hacia el 5.



A continuación: se mueve cada grupo de dos círculos un paso hacia el 5 a cada lado de 5 (en el 4 y el 6).



Pregunte a los niños qué pasa si hubiesen estimado 6.

Actividad 5e

1. *El promedio tiene un decimal, aun cuando el dato dado sea un número natural*

   Los largos de la mano de cada uno de los niños en una fila son de 10 cm, 10 cm, 11 cm, 11 cm, 12 cm y 13 cm. Deje que los niños investiguen si se pueden utilizar algunos métodos que se describen en la Actividad 5d para encontrar el promedio requerido.

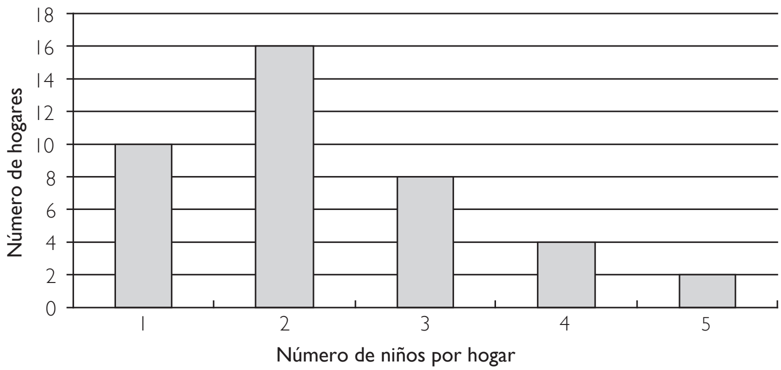
2. En la tabla se muestran las notas que obtuvo cada niño en dos obras de arte que algunos de ellos tuvieron que hacer. La nota máxima para cada obra de arte es 10.

	Obra de arte 1	**Obra de arte 2**
Grupo A	6, 7, 5, 8, 9	5, 5, 8, 7, 0
Grupo B	5, 3, 6, 7, 4	5, 6, 7, 8, 4
Grupo C	10, 10, 8, 9, 9, 8	9, 7, 6, 8, 6, 6

Al buscar la nota promedio de cada obra de arte, los niños tienen que llevar a cabo el proceso de nivelación para cada uno de los conjuntos de notas utilizando los cubos de lego o los clips de colores. A medida que los conjuntos de datos se hacen más numerosos, deje que los niños descubran el algoritmo de sumar para luego dividir.

Ejemplos de preguntas de evaluación

1. En el gráfico se muestra el número de niños por hogar.



   a) ¿Cuántos niños hay en la mayoría de los hogares?

   b) Encuentre el número total de niños en todos los hogares.

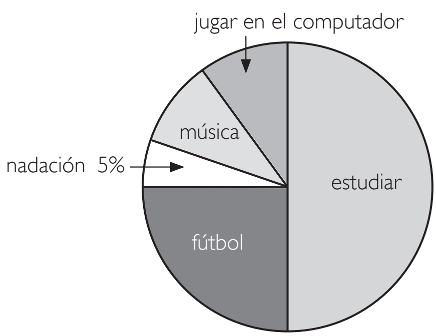
2. La Sra. López compró algunos libros de evaluación en una librería. Pagó un total de $45.100 pesos.

   Algunas partes de su recibo, que se muestra a continuación, están manchadas.

Elemento	Cantidad	Precio por unidad ($)	Subtotal ($)
Libro chino	5	3.500	17.500
Libro de inglés	6	4.600	27.600
Total	11	[illegible]	45.100

   ¿Cuánto pagó por cada libro de inglés?

3. El gráfico circular muestra las actividades de Juan en un día de la semana. Dedica 16 horas de su tiempo en todas estas actividades.

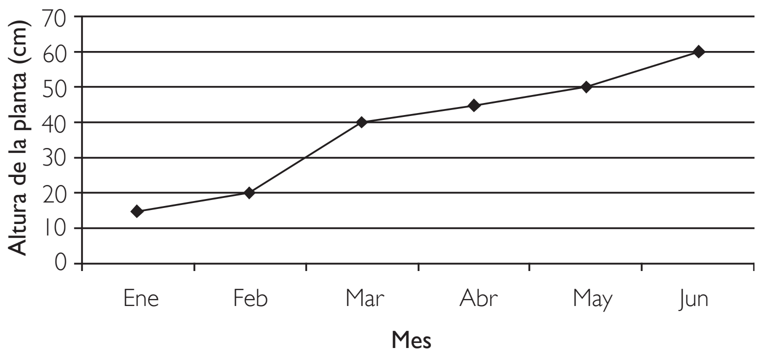


a) Si dedica la misma cantidad de tiempo para escuchar música y jugar en el computador, ¿cuánto tiempo dedica para jugar en el computador? Dé su respuesta en horas y minutos.

b) Encuentre la razón del tiempo que dedica a nadar en relación con el tiempo que dedica para jugar fútbol.

4. El gráfico de líneas muestra la altura de una planta. La planta se mide el primer domingo de cada mes.

   a) Utilice el gráfico para contestar las preguntas.



   b) ¿En qué mes es la altura de la plata 3 veces la altura que tenía que febrero?

   c) ¿Cuál es la altura promedio de la planta de enero a mayo?

   d) ¿Cuál es la razón del aumento de la altura de la planta de febrero a marzo en contraposición con mayo a junio?

Referencias

Gelman, A. y Nolan, D. (2002). *Teaching statistics: A bag of tricks*. Nueva York: Oxford University Press Inc.

Koay, P. L. (1999). Mathematics activities for upper primary pupils. Oxford: Oxford University Press.

Scheaffer, R. (2000). Statistics for a new century. En M. Burke y F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century (2000 Yearbook)*. Estados Unidos: Consejo Nacional de Profesores de matemática, 158-173.

Fuentes de lectura complementaria

HAYLOCK, D. (1995). *Mathematics explained for primary teachers*. Londres: Paul Chapman Publishing Ltd.

HOPKINS, C, GIFFORD, S. Y PEPPERELL, S. (EDS.). (1999). *Mathematics in the primary school: A sense of progression*. Londres. David Fulton Publishing.

SHEFFIELD, L. J., CAVANAGH, M., DACEY, L., FINDELL, C. R., GREENES, C. E. Y SMALL, M. (2002). *Navigating through data analysis and probability in prekindergarten-grade 2*. Estados Consejo Nacional de Profesores de matemática.

TEONG, S. K. (2003). *Teaching of statistics*, Notas no publicadas. Singapur: Instituto Nacional de Educación.

Anexo 15-1

Mapa de contenido de manipulación de datos en las escuelas de educación básica de Singapur.

1° año de educación básica	2° año de educación básica	3° año de educación básica	4° año de educación básica	5° año de educación básica	6° año de educación básica
Gráficos de imágenes (formas horizontales y verticales sin escalas)	**Gráficos de imágenes** (con escalas)	**Gráficos de barra** (formas horizontales y verticales sin escalas)	**Tablas**	**Promedio** (De un conjunto de datos)	**Gráficos circulares**
• Recolectar y organizar datos. • Hacer gráficos de imágenes. • Utilizar imágenes o símbolos para representar objetos. • Leer e interpretar gráficos.	• Hacer gráficos de imágenes. • Leer e interpretar gráficos. • Resolver problemas utilizando la información gráfica que se muestra. • no incluye símbolos o imágenes incompletas.	• Leer e interpretar gráficos de forma vertical e horizontal. • Leer escalas • Completar un gráfico con la información dada. • Resolver problemas utilizando la información gráfica que se muestra.	• Completar una tabla. • Leer e interpretar tablas. • Resolver problemas utilizando la información entregada.	• Interpretar el promedio como ‘el monto total ÷ el número de elementos’. • Calcular el promedio. • Encontrar el monto total a partir del promedio y el número de elementos. • Resolver problemas de enunciado, incluyendo promedios.	• Leer e interpretar gráficos. • Resolver problemas de un paso utilizando la información que se muestra. *No incluye el cálculo de grados
			Gráficos de línea:	**Solo en el Programa fundacional**	
			• Leer e interpretar gráficos. • Resolver problemas utilizando la información gráfica que se muestra. *no incluye gráficos de tiempo-distancia.	**Gráficos de barras y líneas, y tablas** Plan de estudios de 3º y 4º básico.	

Índice temático